

les
QCM
de la prépa

Une approche différente
pour réussir sa Prépa



Physique

Première année

M P S I
P C S I
P T S I
B C P S T

Collection dirigée par **Laurent Desmottes**
Professeur en classes préparatoires

hachette
SUPÉRIEUR

Composition : IndoLogic

Maquette intérieure : Nicolas Piroux

Maquette de couverture : Nicolas Piroux

www.hachette-education.com

© HACHETTE LIVRE 2010, 43 quai de Grenelle 75905 Paris Cedex 15

ISBN : 978-2-01-181255-1



Pour Hachette Éducation, le principe est d'utiliser des papiers composés de fibres naturelles, renouvelables, recyclables, fabriqués à partir de bois issus de forêts qui adoptent un système d'aménagement durable.

En outre, Hachette Éducation attend de ses fournisseurs de papier qu'ils s'inscrivent dans une démarche de certification environnementale reconnue.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Introduction

Cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants en 1^{ère} année d'études supérieures scientifiques (classes préparatoires et 1^{er} cycle universitaire) désirant tester l'outil QCM. Ils en découvriront les nombreuses vertus.

- Par leur caractère ludique, les QCM sont une **invitation permanente à travailler**, et à le faire **avec enthousiasme**.
- Séparés en blocs indépendants, les QCM se prêtent particulièrement à des séquences de travail de courte durée (½ heure par exemple), propices à **une concentration et une efficacité maximales**.
- N'exigeant pas de rédaction, les QCM renvoient néanmoins à **la nécessité de rédiger** convenablement un brouillon pour aboutir à la solution exacte.
- Les QCM confrontent immédiatement l'étudiant à **une évaluation sans concession**. Il n'y a pas de réussite approximative, aucune possibilité de biaiser : c'est bon ou c'est faux !
- Les QCM, qui ne sont faciles qu'en apparence, renvoient aux **fondamentaux** des programmes, à la difficulté qu'il y a en définitive à maîtriser parfaitement des questions de base, et à la nécessité de retravailler constamment ces incontournables. Les QCM ont la vertu de secouer le cocotier.
- Les QCM poussent finalement l'étudiant à se remettre en cause dans ses pratiques, et à s'interroger sur **la qualité, le plaisir et la gestion du temps**, qui sont les véritables critères de la réussite aux concours.



Les sujets proposés dans cet ouvrage reprennent l'intégralité des annales des années 2004 à 2009 du concours de recrutement d'élèves pilote de ligne de l'École Nationale de l'Aviation Civile (ENAC).

- Un premier chapitre donne quelques conseils de méthodologie.
- Les questions des annales des années 2004 à 2008 ont été regroupées en QCM de 5 ou 6 questions, et classées en cinq chapitres thématiques, ce qui permet une utilisation régulière de l'ouvrage tout au long de l'année, à mesure de l'avancée du programme.
- Le dernier chapitre propose une mise en situation réelle portant sur l'intégralité de l'épreuve 2009.

Chaque question propose 4 possibilités de réponse : A, B, C ou D.

Chaque question comporte exactement zéro, une ou deux réponse(s) exacte(s).

À chaque question, le candidat a donc le choix entre :

- sélectionner la seule réponse qu'il juge bonne parmi A, B, C ou D ;
- sélectionner les deux seules réponses qu'il juge bonnes parmi A, B, C ou D ;
- considérer qu'aucune des réponses proposées n'est bonne.

sommaire

Introduction	3
---------------------	---

Comment travailler les QCM	7
-----------------------------------	---

Chapitre 1 : Optique	19
-----------------------------	----

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Miroir sphérique	20	29
• QCM 2 : Appareil photographique	21	33
• QCM 3 : Loupe	23	38
• QCM 4 : Doublet	25	41
• QCM 5 : Lunette de Galilée	27	45

Chapitre 2 : Électricité	51
---------------------------------	----

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Régime sinusoïdal forcé	52	64
• QCM 2 : Puissance	53	71
• QCM 3 : Filtre passif	55	74
• QCM 4 : Fonction de transfert	57	79
• QCM 5 : Filtre actif	60	86
• QCM 6 : Filtre actif	62	89

Chapitre 3 : Mécanique	95
-------------------------------	----

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Brouillard	96	108
• QCM 2 : Électron dans un champ électrique et magnétique	97	112
• QCM 3 : Pendule en translation	99	121
• QCM 4 : Looping	101	127
• QCM 5 : Interaction gravitationnelle	103	132
• QCM 6 : Satellite	106	137

Chapitre 4 : Thermodynamique

139

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Immersion d'une cloche	140	153
• QCM 2 : Détentes d'un gaz parfait	142	157
• QCM 3 : Détente dans le vide	143	162
• QCM 4 : Mélange de deux gaz	146	167
• QCM 5 : Cycle Diesel	148	171
• QCM 6 : Cycle de Carnot	150	175

Chapitre 5 : Électromagnétisme

179

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Noyau atomique	180	192
• QCM 2 : Atome d'hydrogène	182	197
• QCM 3 : Distribution de charges à symétrie sphérique	184	202
• QCM 4 : Disque chargé	186	206
• QCM 5 : Solénoïde	188	211
• QCM 6 : Bobine torique à section carrée	190	217

Chapitre 6 : Annales 2009

221

	énoncés	corrigés
Préambule	222	
• QCM 1 : Filtre passif	222	233
• QCM 2 : Ressort	224	236
• QCM 3 : Sphère creuse chargée	226	239
• QCM 4 : Lunette astronomique	228	243
• QCM 5 : Machine de Stirling	229	248
• QCM 6 : Circuit rLD en régime stationnaire	231	251

Comment travailler les QCM?

- *Qualité contre quantité*
- *Faites-vous plaisir en travaillant*
- *Dépêchez-vous d'aller lentement*
- *Ne tombez pas dans le piège de la spéculation*
- *Ne jouez pas à la devinette*
- *Soyez stratège en vérification*

Préambule

Les idées développées dans ce chapitre concourent à la réalisation d'un seul et même objectif : **votre réussite**. Pour des raisons de clarté, ces idées sont exposées de manière linéaire, mais elles représentent en réalité plusieurs facettes d'une seule et même philosophie.

Ne cherchez donc pas à mémoriser ces idées coûte que coûte. Laissez-vous bousculer par une démarche qui ne va pas forcément de soi, mais dont l'efficacité est pourtant avérée.

Il n'y a pas de recette miracle : les conseils prodigués ici ne produiront pas les effets escomptés si vous vous contentez de vous y conformer, mais sans grande conviction. Pour que la méthode porte ses fruits, vous devrez vous y engager résolument, et être intimement persuadé que c'est bien là la meilleure façon de travailler, et la seule qui soit réellement payante à court, moyen et long terme.

Il faudra donc vous approprier les idées qui sont développées dans les pages qui suivent, les reformuler avec vos propres mots, et les hiérarchiser à votre convenance. Certaines vous parleront davantage que d'autres : commencez par mettre en application celles que vous avez envie d'adopter. Les meilleures méthodes sont bien sûr celles que vous aurez mises au point et peaufinées vous-mêmes.

Certains étudiants réussissent très brillamment aux concours : ce ne sont pas forcément les plus savants ni les plus travailleurs, mais tous ont en commun le fait d'avoir, plus ou moins consciemment, mis au point et utilisé des méthodes efficaces. Il y a bien sûr mille et une façons de décrire les méthodes de travail qui marchent : selon les écoles pédagogiques, les concepts et le vocabulaire employé changent. Mais les réalités sous-jacentes sont toujours les mêmes. Ces méthodes, en apparence diverses et variées, se ressemblent étrangement. On y retrouve toujours un dénominateur commun :

qualité, plaisir, gestion du temps.

Les méthodes qui marchent sont tellement à l'encontre des idées reçues, tellement à l'opposé de celles utilisées par la grande majorité des étudiants qu'il vous faudra peut-être beaucoup de temps ... et beaucoup d'échecs avant de vous résoudre à les adopter. Ce sont pourtant **les seules méthodes qui marchent**, et elles ont de plus le mérite d'être **simples**, et pleines de **bon sens**.

Qualité contre quantité

Dans une épreuve de QCM, comme dans toute épreuve de concours, **il ne faut pas chercher à en faire le plus possible, mais à en réussir le plus possible**. La différence est de taille.

Si vous voulez en faire le plus possible, vous devrez vous dépêcher et respecter scrupuleusement le timing que vous vous êtes imposé (par exemple : 24 questions / deux heures, soit 5 minutes par question). Ce faisant, vous vous concentrerez sur l'horloge, sur ce que font les autres et sur votre performance, au lieu de vous concentrer sur le contenu de l'exercice. En réalité, vous ne serez performant qu'en terme de nombre de questions traitées, et non en terme de nombre de questions réussies. Peut-être serez-vous satisfait de vous à la sortie de l'épreuve : si c'est le cas, profitez-en, car votre satisfaction risque d'être de courte durée !

En cherchant à répondre au plus grand nombre de questions possible, vous risquez de négliger voire d'occulter totalement deux étapes essentielles de tout exercice : la lecture attentive de l'énoncé et la vérification.

Acceptez-vous qu'il est impossible, sauf pour quelques individus, d'obtenir la qualité **et** la quantité ? Il vous faut choisir : qualité **contre** quantité. Qualité **ou** quantité ? Vous n'aurez pas les deux !

La plupart des comportements improductifs adoptés par les étudiants procèdent d'idées fausses et d'observations inexactes, et sont générés par des sentiments négatifs (peur de l'échec, peur de décevoir, manque de confiance en soi) qui les font réagir de façon inappropriée. Tordons alors le cou à quelques unes de ces idées fausses.

• « Les QCM, c'est facile. »

Non : aucune question, aucune épreuve de concours n'est facile en soi. Un examen peut l'être, mais pas un concours. Le rôle d'un concours est de sortir les meilleurs du lot, de discriminer, de créer de l'écart type en quelque sorte. Si le concours est facile, il ne joue plus son rôle de concours. Bien sûr, chaque question prise séparément peut sembler relativement facile ! Mais la difficulté est ailleurs. Dans le cas des QCM de l'ENAC, les aptitudes qui sont testées sont d'une part le comportement de l'étudiant face au stress (n'oublions pas que l'ENAC forme des pilotes de ligne susceptibles de rencontrer un jour des situations génératrices de stress !), et d'autre part la capacité à réussir à 100 %, et non pas à 99 %, une question plutôt facile. Or, contrairement aux idées reçues, et ceci est vrai pour tous les concours, **c'est sur les questions simples que les candidats perdent le plus de points, et c'est sur ces questions simples qu'un concours se gagne ou se perd**, et pas sur les questions les plus élaborées, destinées uniquement à départager les meilleurs (et peut-être à déstabiliser les autres !?). Le taux de réussite de ces questions apparemment faciles est en réalité beaucoup plus faible qu'on ne le pense. *A fortiori* pour le QCM qui est une épreuve binaire : la réponse est bonne ou fausse, et il n'y a pas de place pour la demi mesure, aucun moyen de limiter la casse et de compenser un résultat erroné par un raisonnement détaillé et une présentation soignée. Le correcteur automatique ne fait aucune différence entre celui qui connaissait son cours et a échoué de peu, et celui qui a fait l'impasse totale sur le sujet.

• « Une épreuve écrite est une course contre la montre. »

Non : le temps n'est pas un problème en soi, chacun disposant exactement du même temps. Ce qui importe, c'est l'usage que chaque candidat fera de ce temps, et c'est là que des inégalités apparaissent. On peut dire de presque tous les candidats que s'ils n'avaient disposé que de la moitié du temps imparti mais l'avaient mieux utilisé, ils auraient, avec les connaissances et les facultés qui sont les leurs, obtenu assurément une meilleure note. Ce n'est pas contre le temps qu'il faut se battre, mais contre la tentation de la panique, de la précipitation, et finalement d'un mauvais usage du temps. Le temps, il faut s'en faire un ami, et non un ennemi.

Les notes obtenues par une population de candidats d'effectif suffisamment important se répartissent statistiquement selon une courbe de Gauss dont le centre (la moyenne) se situe aux alentours de 5/20. L'objectif n'est donc pas de traiter toutes les questions. L'objectif est bien de réussir une question à 100 %, puis une autre à 100 %, etc. Vous verrez bien jusqu'où cela vous mène, mais cela n'a finalement pas grande importance. Si vous avez répondu à moins de questions que vous ne l'espériez, dites-vous bien qu'en vous dépêchant, votre performance serait certainement moins bonne que celle que vous avez effectivement réalisée.

En définitive, c'est lorsqu'on accepte de renoncer à tout objectif de quantité, pour ne poursuivre qu'un objectif de qualité, qu'on assure la meilleure performance sur le plan de la quantité, c'est-à-dire en nombre de points engrangés. C'est comme s'il fallait ruser avec l'obstacle, s'engager dans une direction apparemment diamétralement opposée à celle dans laquelle on désire se rendre, afin d'y parvenir plus sûrement. Il en va bien ainsi pour les gratte-ciel : ceux qui s'élèvent le plus haut sont ceux qui ont été enracinés le plus profondément dans le sol lors de leur édification. La quantité est un sous-produit de la qualité, un objectif secondaire : elle s'obtient en prime, sans qu'on l'ait réellement recherchée.

Pour terminer, on pourrait utiliser l'image de la course à pied. Il y a trois types de course : la **course de fond** ou d'endurance, qui consiste à parcourir une longue distance à vitesse modérée et constante, le **sprint**, qui consiste à parcourir une courte distance à vitesse élevée, et la **résistance**, qui consiste à parcourir une distance intermédiaire à vitesse intermédiaire. La Prépa est une course de fond. L'épreuve de concours est une épreuve de résistance, trop souvent confondue avec un sprint. Et c'est par l'endurance qu'on s'entraîne le plus efficacement à la résistance. **Il n'y a pas de place ici pour le sprint !**

Faites-vous plaisir en travaillant

Il est fondamental de prendre plaisir à travailler. Même si la Prépa reste une expérience éprouvante, pourquoi ne rimerait-elle pas aussi avec plaisir ? Le

plaisir s'appuie sur des motivations. Cherchez-vous des motivations personnelles, **intérieures**, sur lesquelles vous avez prise et qui ne peuvent pas disparaître (soit de découvrir, de connaître, d'apprendre, de comprendre, d'analyser, de relier, de synthétiser, de structurer, de planifier, de modéliser, d'extrapoler, d'expérimenter, de concevoir, d'inventer, d'entreprendre) plutôt que des motivations **extérieures**, sur lesquelles vous n'avez pas prise et qui ne sont pas pérennes (note à un devoir, passage dans la filière désirée, admission dans telle ou telle Grande Ecole, carrière, salaire). Bien sûr, nul ne peut être indifférent à une note, à un passage ou à une admission, mais si vous ne touchez pas à des motivations inaltérables, vous ne pourrez pas goûter à un minimum de satisfaction dans votre travail quotidien. Et sans cette satisfaction, vous ne tiendrez pas le coup. Les motivations personnelles, plus désintéressées que les motivations extérieures, sont celles qui offrent les meilleures garanties de réussite aux objectifs que vous vous êtes fixés, parce qu'en étant mu par ces motivations intérieures, vous êtes dans les conditions les plus propices à la réussite : **moral au beau fixe** et **concentration optimale**. Si au contraire vous laissez votre moral être constamment chahuté au gré des notes, bonnes ou mauvaises, vous vous épuiserez dans ces mouvements de yoyo incessants. Ne vous trompez pas de motivations !

En Prépa, le plaisir n'est pas optionnel : il est facteur de réussite.

Peut-être faites-vous partie de ceux qui considèrent que la Prépa est un mal nécessaire. Mais qui peut dire, avant même d'avoir débuté sa vie professionnelle, aujourd'hui plus que jamais jalonnée d'infléchissements de trajectoire, que ce qu'il apprend ne lui sera d'aucune utilité ? Une telle conception de la Prépa est-elle seulement compatible avec le métier d'ingénieur auquel elle prépare, métier qui consiste par essence à s'adapter à des situations aussi déroutantes qu'inédites ? Disposez-vous du recul nécessaire pour en juger, et faut-il vous en remettre à l'avis d'étudiants qui ne vous précèdent que de deux ou trois ans ?

C'est ici que les QCM trouvent leur utilité.

Le premier intérêt des QCM est leur caractère **ludique**. Ils attirent et séduisent par leur apparente facilité : énoncés courts, absence de rédaction, réponses préétablies, similitude avec les sudokus que l'on remplit sur le coin d'une table pour se détendre ou tuer le temps, sachant qu'on n'y passera pas trois heures.

Ceci étant, il y a plein d'autres bonnes raisons de travailler à l'aide de QCM, même si vous n'envisagez pas de vous présenter au concours ENAC, et même si le QCM ne peut en aucun cas se substituer ni précéder l'assimilation du cours, la réalisation et la mémorisation de fiches résumé et de fiches méthode. Voici quelques-unes de ces raisons.

- Pour maintenir à un niveau élevé votre concentration et votre efficacité, vous devez travailler sur **des séquences courtes** avec **des objectifs clairement identifiés et limités**. Les QCM répondent à ces deux exigences.
- Les QCM vous obligent à **travailler les fondamentaux**, qui doivent être totalement maîtrisés, et non pas à peu près maîtrisés, dans toutes les configurations possibles et imaginables. Vous vous apercevrez peut-être au détour d'un QCM combien une notion de base présentée dans un énoncé légèrement différent peut vous déstabiliser ! Nul besoin d'aller travailler des annales qui ressemblent à des romans fleuves et vous éloignent de vos bases, si ces bases ne sont pas préalablement « bétonnées ». C'est l'option qualité contre quantité.
- Les QCM vous confrontent immédiatement à une **évaluation**. Vous ne pourrez pas, en lisant la correction, vous en tenir à un jugement approximatif du genre : « j'avais compris dans les grandes lignes » : le score vous obligera à regarder la vérité en face. Une des conditions de la progression, c'est d'accepter ce score sans complaisance, et d'en faire une analyse lucide et rigoureuse ... tout en gardant le moral : vous vous êtes quand même bien amusé, et vous n'avez pas perdu votre temps puisque vous avez mis le doigt sur une lacune que vous allez retravailler !

Dépêchez-vous d'aller lentement

Voilà qui résume dans quelle disposition d'esprit vous devez vous trouver : être à la fois serein, dégagé de toute contrainte horaire et de toute pression psychologique néfaste, de façon à pouvoir canaliser au mieux votre attention et vos énergies, à pouvoir prendre les bonnes décisions quant à la gestion de votre temps, et, dans le même temps, être dans cet état de léger stress positif qui vous stimule, vous tient en alerte et soutient votre rythme.

Vous octroyer tout le temps dont vous avez besoin ne signifie pas que vous allez le gaspiller. Cela signifie simplement que vous allez le consacrer à des priorités, et que **le nombre de questions que vous traiterez ne figure en aucun cas dans votre liste de priorités**. Quelles sont ces priorités ?

- **Un survol rapide de l'ensemble du sujet** afin d'identifier les blocs de questions indépendants, et les parties de programme auxquelles ont trait chaque bloc. Ne vous contentez pas d'une affectation sommaire : questions 13 à 18 → mécanique. Soyez plus précis : questions 13 à 18 → rotation en mécanique non galiléenne non terrestre. L'objectif est d'identifier les blocs qui vous attirent le plus (toujours le plaisir, qui facilite la concentration), et dans lesquels vous pensez être le plus performant. Commencez à travailler bloc par bloc, dans l'ordre de préférence que vous aurez établi. Au sein d'un même bloc, évitez de picorer : traitez si possible les questions dans l'ordre.

- **Une lecture linéaire, approfondie et réitérée de l'énoncé de chaque question.**
Ne lisez pas en diagonale, mais ayez une lecture active : surlignez ou surlignez les mots-clé et ceux qui vous laissent perplexe. Pensez que chaque mot, chaque virgule, chaque indice est porteur de sens et n'a pas été placé là par hasard. Ne décollez pas du sujet, ne partez pas dans des *a priori*.
- À ce stade, **payez vous le luxe de réfléchir de manière désintéressée** à la question, pour le sport (toujours le plaisir), sans chercher une productivité immédiate : « quelles sont les lois du cours que je suis susceptible de devoir utiliser ? Comment représenter le système dans l'espace ? Quel schéma pourrais-je en faire ? Quelles questions pourrait-on me poser ? À quel exercice cela me fait-il penser ? En quoi celui-ci est-il différent ? »
- **Rédigez votre solution au brouillon** quasiment comme s'il s'agissait d'une copie. Dans le cas d'un QCM, le fait que vous n'ayez qu'à cocher des cases ne signifie aucunement qu'il faille résoudre mentalement ou bâcler le calcul : vos chances de réussite s'en trouveraient considérablement réduites. Ne tombez pas dans le piège d'une résolution express sous prétexte que les données et les réponses sont des expressions ou des valeurs numériques simples.
- **Vérifiez vos calculs** (voir plus loin).
- Si d'aventure vous ne parvenez pas à la solution, déterminez si vous devez **écarter cette question, et tout ou partie du bloc de questions auquel elle se rattache**. Pas d'effolement cependant, votre stratégie de qualité et de gestion du temps n'est nullement remise en cause ! Vous en ferez peut-être moins que souhaité ... tout comme les autres sans doute !

Ne tombez pas dans le piège de la spéculation

- Dans un QCM, ne vous lancez pas dans des calculs de probabilité conditionnelle sur les chances que la bonne réponse soit la C sachant qu'au deux questions précédentes vous avez déjà opté pour la réponse C. **Le QCM n'est pas un jeu de hasard** : si vous jouez vos réponses aux dés, avec quatre réponses possibles à chaque question (et davantage encore si on considère l'absence de bonne réponse et le doublon de réponses), vos chances de réussite sont infimes, et nettement inférieures à ce qu'elles seraient en utilisant normalement vos capacités.
- Ne perdez pas de temps dans des spéculations stériles en essayant d'imaginer où le sujet voudrait vous emmener ... ou vous fourvoyer : « si je réponds A à la question 23, je ne peux répondre que C à la question 24 ; par contre, si je réponds B à la question 23 ... ».

Ne jouez pas à la devinette

Il n'y a qu'une seule façon de trouver la réponse à une question : c'est de la résoudre en rédigeant la solution. Même si, dans sa présentation ludique, le QCM n'est pas sans rappeler un célèbre jeu télévisé, il n'y a pas de place ici pour la devinette. Ne la jouez pas au feeling, vous avez de grandes chances de vous tromper. Méfiez-vous de vos impressions lorsqu'elles ne reposent pas sur des argumentations fondées et rigoureuses.

Exemples d'impressions non fondées

- « L'expression exacte est sans doute la plus simple. »
- « L'expression exacte est sans doute la plus compliquée. »
- « L'expression exacte est sans doute la plus symétrique. »
- « Je verrais bien la capacité C intervenir au carré au dénominateur. »
- « Un grossissement de 4, cela me paraît élevé. »

Soyez stratège en vérification

Les entreprises l'ont bien compris, qui vivent aujourd'hui à l'heure des chartes et des normes de qualité :

un travail n'est pas achevé tant qu'il n'a pas été vérifié.

Vous devez partir du principe que tant que vous n'avez pas vérifié le résultat d'une question sous toutes ses coutures, c'est comme si vous ne l'aviez pas traitée. Autrement dit, vous avez travaillé pour rien. Votre taux de réussite avant vérification avoisine peut-être les 40 %. L'étape de la vérification vous permet d'atteindre les 100 % : c'est donc l'étape la plus productive, sa valeur ajoutée est considérable.

Encore faut-il accepter de consacrer à cette étape le temps nécessaire. Une vérification bâclée, c'est du temps de perdu : autant ne rien faire ! Puisque vous avez décidé de vérifier, vous devez vérifier jusqu'au bout. Dans la vérification aussi, privilégiez la qualité. À titre d'exemple, il n'est pas absurde de concevoir qu'à une question dont la résolution vous aura déjà demandé 5 minutes, il vous faille consacrer 5 minutes supplémentaires simplement pour vérifier.

Voici quelques idées.

- La vérification suit des procédures **codifiées, détaillées et reproductibles**. C'est à vous que revient la tâche d'élaborer ces procédures systématisées de vérification.

Il n'y a pas de place ici pour l'improvisation : vos procédures doivent être rôdées, éprouvées et perfectionnées tout au long de l'année. Il ne faut rien laisser au hasard (enfin ... le moins possible !).

- La vérification doit être **validée**. C'est pourquoi la relecture de votre brouillon n'est pas une vérification en soi, car elle n'est assortie d'aucune validation. Nous donnerons plus loin des exemples de vérifications.

Les procédures : que faut-il vérifier ?

1. Vérification des lignes de calcul et du résultat

La majorité des calculs consistent en une succession d'égalités pour lesquelles il faut vérifier l'**homogénéité** entre les membres de gauche et de droite. Cela concerne :

- a) les dimensions.** Cette vérification ne peut se faire que si vos calculs sont littéraux. C'est pourquoi il faut toujours privilégier le calcul littéral, et différer le plus possible l'application numérique. Y compris si l'énoncé ne semble s'intéresser qu'à des valeurs numériques : dans ce cas, définissez vous-même les grandeurs littérales dont vous aurez besoin.

Exemples

- En électricité, l'expression $i = \frac{(2E_2 - E_1)r^2}{R^2 + 5Rr + 2r^2}$ est fausse puisqu'elle égalise un courant à une tension.
- De même, l'expression $i = \frac{(2E_2 - E_1)r}{R^2 + 5Rr + 2r^2}$ qui conduit à sommer au dénominateur des Ω^2 et des Ω (Ohms).

- b) la nature vectorielle ou au contraire scalaire (c'est-à-dire numérique).**

Exemples

- L'expression $\vec{dS} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ est erronée car un vecteur ne peut pas être égal à un scalaire.

- c) la multiplicité d'un infiniment petit ou d'une intégrale.**

Exemples

- Si l'expression $dS = r^2 \sin\theta d\theta$ est juste en ce qui concerne les dimensions, elle est néanmoins erronée car dS , qui représente un élément de surface, est un infiniment petit d'ordre deux, et le membre de droite un infiniment petit d'ordre un.
- Par ailleurs, l'écriture $\iiint r^2 \sin\theta dr d\theta$ est incorrecte puisqu'à une intégrale triple doit correspondre un infiniment petit d'ordre trois et non deux !



Quand vérifier ? Si le résultat final est inhomogène, vous devrez remonter ligne à ligne jusqu'à retrouver la 1^{ère} ligne où s'est glissée l'erreur d'homogénéité. Le plus sage et le moins mangeur de temps est donc de vérifier l'homogénéité de chaque ligne de calcul au moment même où vous l'écrivez, ou de le faire le plus souvent possible, dès que vous y pensez.

2. Vérification du résultat

- a) En vous appuyant sur des considérations physiques que vous n'avez, si possible, pas utilisées lors de votre résolution, vérifiez le **signe**, le **sens**, le **sens de variation** ou l'**ordre de grandeur** du résultat. Essayez même de les prévoir avant d'effectuer les calculs.

Exemples

- Les lignes de champ électrostatique créées par un objet chargé *négativement* sont nécessairement orientées vers cet objet, et non pas vers l'infini.
- Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une distribution *volumique* de charges est continu en tout point de l'espace.
- La pression dans un liquide en équilibre *augmente* de haut en bas.
- Les valeurs usuelles de capacité des condensateurs utilisés dans les montages électroniques varient entre 10^{-12} F et 10^{-6} F.

- b) La vérification par les **cas particuliers** s'avère payante : il s'agit de tester la validité du résultat littéral dans des cas très simples (angle droit ou nul, distance infinie ou nulle, date infinie ou nulle, point situé au centre, absence de frottement ...) pour lesquels le résultat peut être obtenu sans aucun calcul ou par une autre méthode.

Exemple

La relation trigonométrique $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta$ peut être testée rapidement à l'aide de deux valeurs particulières (ce qui n'a bien sûr pas valeur de démonstration !) :

$$\begin{cases} \text{si } \theta = 0 : \cos(\pi/2) = -\sin(0) = 0 \\ \text{si } \theta = \pi/2 : \cos(\pi) = -\sin(\pi/2) = -1 \end{cases}$$

3. Vérification complète

Si toutes les procédures précédentes ont abouti, vous vous estimerez peut-être satisfait, et passerez à la question suivante. Sans doute à tort ! La vérification complète s'avère souvent très utile.

Si par contre l'étape précédente n'a pas été concluante, vous ne pourrez pas échapper à cette vérification complète, qui consiste à recommencer totalement le travail. Voici deux façons de procéder.

a) Vérification croisée

D'une efficacité maximale, cette technique devrait être pratiquée systématiquement. Elle consiste à utiliser une méthode totalement différente de celle que vous avez utilisée à la première mouture. Dans le cas où plusieurs vérifications croisées sont possibles, cela augmente vos chances de réussite. Si toutes les méthodes convergent vers un même résultat, vous pouvez raisonnablement être satisfait. En cas de divergence, vous devrez démêler le vrai du faux. C'est ainsi que procède Météo France qui obtient ses prévisions jusqu'à $j+7$ en faisant tourner ses computers sur 5 modèles différents. Si les 5 modèles convergent, elle affichera un indice de confiance de 5/5 ; si seulement trois modèles convergent, l'indice chutera à 3/5, etc.

Exemples

- Imaginons un exercice de mécanique qui pourrait être résolu indifféremment à l'aide du principe fondamental de la dynamique, du théorème de l'énergie cinétique ou du théorème de l'énergie mécanique, et ce aussi bien dans un référentiel galiléen que dans un référentiel non galiléen.
- Ou encore un exercice d'électrostatique dans lequel le champ $\vec{E}$ pourrait être calculé soit à l'aide du théorème de Gauss, soit par la méthode intégrale.

Le principe de la vérification croisée est qu'elle vous oblige d'effectuer des calculs et à tenir des raisonnements différents. Les risques que vous reproduisiez les mêmes erreurs sont ainsi limités.



b) Vérification simple

Dans le cas où vous ne disposez d'aucune méthode de substitution, vous relire ne servirait à rien, car la plupart des erreurs d'étourderie et de raisonnement vous échapperont : ce sont les vôtres, vous y êtes habitué, elles ne vous choquent plus. De plus, la relecture est une activité plus passive que la 1^{ère} lecture ou l'écriture : il n'y a guère de valeur ajoutée, donc vous risquez de vous ennuyer et aurez tendance à expédier le travail en pure perte.

Vous devez donc prendre une feuille blanche et recommencer. Mais pas à l'identique ! En essayant de modifier votre deuxième mouture afin qu'elle s'écarte le plus possible de la première. Objectif : casser la mémoire du stylo et les mauvais automatismes qui vous feraient réécrire exactement les mêmes erreurs aux mêmes endroits.

Exemples

- Détaillez les calculs et ajoutez des lignes intermédiaires.
- Inversez membre de gauche et membre de droite dans les équations.
- Effectuez les calculs dans un ordre légèrement différent.
- Écrivez les hypothèses.

4. Utilisation de la calculatrice

Un mot sur l'emploi de la calculatrice.

On entend souvent dire que les étudiants font trop confiance à la calculatrice. Comme si la calculatrice pouvait se tromper et leur jouer de mauvais tours ! En réalité, **la calculatrice ne se trompe jamais**. Ce sont seulement les étudiants qui se piègent eux-mêmes par étourderie ou parce qu'ils ne maîtrisent pas toutes les fonctionnalités de leur calculatrice (notamment l'emploi des parenthèses multiples, les règles de priorité entre opérations, et l'utilisation des puissances de 10).

Pour y palier, voici quelques conseils.

- **La calculatrice ne doit pas se substituer au calcul mental.** Avant d'effectuer une opération à la calculatrice, évaluez mentalement, par le biais d'approximations plus ou moins grossières, la puissance de dix et le premier chiffre significatif du résultat qui doit s'afficher ensuite. Cette gymnastique vous paraîtra épuisante au début, surtout si vous êtes rouillé, mais vous verrez que cela n'est pas inaccessible et que cela peut même devenir un jeu. Veillez à effectuer cette vérification mentale avant d'utiliser la calculatrice, afin de pas être influencé par le résultat : votre vérification n'en sera que plus probante.

La calculatrice n'est utile qu'à ceux qui sont capables de s'en passer.

- Si l'utilisation des parenthèses en cascade vous pose vraiment trop de problèmes, fractionnez vos calculs.

Sachez toutefois que la vérification a ses limites : si vous en faites trop, vous gaspillez du temps pour un maigre bénéfice marginal : à vous de trouver le bon compromis.

Cette étape de la vérification peut vous paraître exagérément développée et dévoreuse de temps : en réalité, cela peut devenir plus rapide avec de l'entraînement.



Pour terminer, n'oubliez pas que le plus difficile concernant la vérification, c'est de penser à la faire, et d'accepter d'y consacrer le temps nécessaire. C'est la raison pour laquelle il faut revenir régulièrement sur ce chapitre, et lui accorder autant d'importance qu'à un cours.

chapitre 1

Optique

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Miroir sphérique	20	29
• QCM 2 : Appareil photographique	21	33
• QCM 3 : Loupe	23	38
• QCM 4 : Doublet	25	41
• QCM 5 : Lunette de Galilée	27	45

→ QCM 1 Miroir sphérique

• Question 1

Un miroir sphérique de centre C et de sommet S est plongé dans un milieu homogène et isotrope d'indice n . Dans la suite, *toutes les distances algébriques sont comptées positivement dans le sens de propagation de la lumière incidente*. Exprimer la vergence V du miroir.

A $V = -\frac{2}{nSC}$

B $V = -\frac{2n}{SC}$

C $V = \frac{n}{SC}$

D $V = -\frac{SC}{2n}$

• Question 2

Donner les positions des foyers objet F et image F' du miroir.

A F est situé au milieu du segment SC et F' est symétrique de F par rapport au sommet S .

B F' est situé au milieu du segment SC et F est symétrique de F' par rapport au centre C .

C F et F' sont confondus et situés au milieu du segment SC .

D F et F' sont rejetés à l'infini.

• Question 3

Quelle doit être la vergence V d'un miroir sphérique placé dans l'air (indice $n = 1$) pour qu'il donne d'un *objet réel* placé à 10 m du sommet, une *image droite* (de même sens que l'objet) et *réduite* dans le rapport 5 ?

A $V = -0,4 \delta$

B $V = -12,2 \delta$

C $V = 3,7 \delta$

D $V = 12 \delta$

• Question 4

Quelle est la nature d'un tel miroir ?

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| A Convergent et convexe. | B Divergent et concave. |
| C Divergent et convexe. | D Convergent et concave. |

• Question 5

Un objet est placé dans un plan orthogonal à l'axe optique du miroir passant par le centre C . Où se trouve l'image ?

- A** L'image se trouve dans le même plan passant par C .
- B** L'image se trouve dans le plan focal image du miroir.
- C** L'image est rejetée à l'infini.
- D** L'image se trouve dans le plan passant par le sommet S du miroir.

• Question 6

Exprimer dans ce dernier cas le grandissement G du miroir.

- | | |
|------------------|-----------------------------|
| A $G = 1$ | B $G = -\frac{1}{2}$ |
| C $G = 2$ | D $G = -1$ |

➔ QCM 2 Appareil photographique

• Question 1

On assimile l'objectif d'un appareil photographique à une lentille mince convergente de distance focale image $f'_a = 135$ mm. On désire photographier une toile de maître située à 3 m en avant de l'objectif. À quelle distance $p' > 0$, en arrière de l'objectif, faut-il placer la pellicule photographique pour obtenir une image nette de la toile ?

- | | |
|------------------------|------------------------|
| A $p' = 93$ mm | B $p' = 129$ mm |
| C $p' = 141$ mm | D $p' = 245$ mm |

• Question 2

Cet appareil photographique est utilisé pour photographier le ciel nocturne. Son *format* est le 24×36 , ce qui signifie que la pellicule photographique mesure 24 mm de hauteur et 36 mm de largeur. Quel est le champ du ciel photographié ?

A $10^\circ \times 15^\circ$

B $20^\circ \times 30^\circ$

C $32^\circ \times 48^\circ$

D $64^\circ \times 48^\circ$

• Question 3

Calculer, en minute d'arc ('), le diamètre apparent θ du disque lunaire vu par l'objectif de l'appareil photographique. On supposera la Lune sphérique, de rayon 1740 km, et de centre situé à 384 000 km de l'objectif.

A $\theta = 0,086'$

B $\theta = 16'$

C $\theta = 31'$

D $\theta = 1800'$

• Question 4

Avec cet appareil, on photographie la pleine Lune, l'axe optique de l'objectif étant dirigé vers le centre du disque lunaire. On effectue un tirage de la pellicule sur du papier de format $10 \times 15 \text{ cm}^2$. Quel est le diamètre d du disque lunaire sur le papier ?

A $d = 1,4 \text{ mm}$

B $d = 5,1 \text{ mm}$

C $d = 2,6 \text{ mm}$

D $d = 31,0 \text{ mm}$

• Question 5

L'objectif d'un projecteur de diapositive est assimilé à une lentille mince convergente qui donne, d'un objet réel, une image inversée et de même dimension, sur un écran placé à 0,2 m de l'objet. Calculer la distance focale image f'_p de cet objectif.

A $f'_p = 2 \text{ cm}$

B $f'_p = 5 \text{ cm}$

C $f'_p = 20 \text{ cm}$

D $f'_p = 50 \text{ cm}$

• Question 6

Le projecteur précédent forme l'image d'une diapositive de format $24 \times 36 \text{ mm}^2$ sur un écran situé à 4,5 m de distance. Quelle est la taille de l'image sur l'écran ?

A $1 \times 1,5 \text{ m}^2$

B $1,7 \times 2,6 \text{ m}^2$

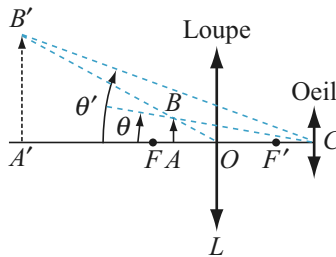
C $2,1 \times 3,2 \text{ m}^2$

D $5,4 \times 8,1 \text{ m}^2$

→ QCM 3 Loupe

• Question 1

On appelle *distance de vision distincte* d'un œil la distance d qui sépare un objet dont l'image sur la rétine est nette, du centre optique C de cet œil que l'on assimile à une lentille mince. Grâce à la propriété d'accommodation du cristallin, d peut varier entre une *distance maximale de vision distincte* d_M et une *distance minimale de vision distincte* d_m . Pour un œil normal, $d_m = 20 \text{ cm}$ et $d_M = \infty$.



Un observateur dont la vision est normale, se sert d'une lentille mince convergente L de centre optique O et de distance focale image f' comme d'une loupe. Il observe l'image virtuelle $\overline{A'B'}$ que donne la loupe d'un objet réel $\overline{AB}$.

En s'aidant de considérations géométriques (cf. figure ci-dessus) et de la relation de conjugaison des lentilles minces, exprimer la quantité $G_t = \overline{A'B'} / \overline{AB}$ en fonction de f' , de $d = \overline{A'C}$ et de la distance $\delta = \overline{OC}$ qui sépare le centre optique O de la lentille L du centre optique C de l'œil.

A $G_t = \frac{d + \delta}{2f'}$

B $G_t = \frac{f'}{d + 2\delta}$

C $G_t = \frac{f' + \delta}{d}$

D $G_t = \frac{d + f' - \delta}{f'}$

• Question 2

Lorsque l'observateur regarde un objet $\overline{AB}$ à travers la loupe, il voit son image $\overline{A'B'}$ sous l'angle θ' . Lorsqu'il enlève la loupe sans changer la distance de l'objet à son œil, il voit cet objet $\overline{AB}$ sous l'angle θ (cf. figure page précédente). On définit le grossissement G de la loupe par le rapport $G = \theta'/\theta$.

Exprimer G en fonction de f' , δ et d . On supposera les angles suffisamment petits pour que l'on puisse confondre le sinus et la tangente de ces angles avec leurs valeurs exprimées en radian.

A $G = \frac{f'(d - \delta) - f'^2}{d^2}$

B $G = \frac{\delta(d - \delta) + f'^2}{f'^2}$

C $G = \frac{f' + \delta}{f'} - \frac{\delta^2}{f'd}$

D $G = \frac{(f' + \delta)(d + \delta)}{f'd}$

• Question 3

Quelle est la valeur de d donnant un grossissement maximum ?

A $d = f' + \delta$

B $d = \infty$

C $d = 4f'$

D $d = 4(f' + \delta)$

• Question 4

Que vaut alors ce grossissement $G_{\max}$?

A $G_{\max} = \frac{f' + 2\delta}{f'}$

B $G_{\max} = \frac{f' + \delta}{\delta}$

C $G_{\max} = \frac{f'}{\delta}$

D $G_{\max} = \frac{f' + \delta}{f'}$

• Question 5

L'observateur maintient fixe la position de la loupe par rapport à son œil et, suivant la position de l'objet, il accommode de l'infini jusqu'à sa distance minimale de vision distincte d_m .

Calculer la variation $\Delta G = G(\infty) - G(d_m)$ du grossissement.

A $\Delta G = \frac{\delta^2}{f'd_m}$

B $\Delta G = \frac{(2f + \delta)^2}{f'd_m}$

C $\Delta G = \frac{f'^2 + \delta^2}{f'd_m}$

D $\Delta G = \frac{f'^2}{\delta d_m}$

• Question 6

Le centre optique de l'œil est placé à 18 cm du centre optique de la loupe. Quelle doit être la valeur f'_0 de la distance focale image de la loupe pour que le grossissement maximal $G_{\max}$ soit égal à 10 ?

A $f'_0 = 1 \text{ cm}$

B $f'_0 = 10 \text{ cm}$

C $f'_0 = 2 \text{ cm}$

D $f'_0 = 5 \text{ cm}$

→ QCM 4 Doublet

• Question 1

On dispose un objet $\overline{A_0B_0}$ orthogonalement à l'axe optique d'une lentille *divergente* L_1 de distance focale image $f_1 = -20 \text{ cm}$. Quelle doit être la valeur $\overline{O_1A_0}$ de la position de l'objet par rapport au centre optique O_1 de L_1 pour que le grandissement transversal G_t soit égal à $\frac{1}{2}$?

A $\overline{O_1A_0} = -20 \text{ cm}$

B $\overline{O_1A_0} = 10 \text{ cm}$

C $\overline{O_1A_0} = -10 \text{ cm}$

D $\overline{O_1A_0} = -40 \text{ cm}$

• Question 2

Quelle est alors la position $\overline{O_1 A_i}$ de l'image $\overline{A_i B_i}$ par rapport à O_1 ?

A $\overline{O_1 A_i} = -20 \text{ cm}$

B $\overline{O_1 A_i} = -10 \text{ cm}$

C $\overline{O_1 A_i} = 15 \text{ cm}$

D $\overline{O_1 A_i} = 40 \text{ cm}$

• Question 3

On place après L_1 un viseur constitué d'une lentille *convergente* L_2 , de même axe optique que L_1 , de distance focale image $f_2 = 40 \text{ cm}$ et un écran E disposé orthogonalement à l'axe optique à une distance $\overline{O_2 E} = 80 \text{ cm}$ du centre optique O_2 de L_2 . Calculer la distance $\overline{O_1 O_2}$ entre les centres optiques des lentilles L_1 et L_2 pour que l'on observe sur l'écran une image nette de l'objet $\overline{A_0 B_0}$.

A $\overline{O_1 O_2} = 50 \text{ cm}$

B $\overline{O_1 O_2} = 10 \text{ cm}$

C $\overline{O_1 O_2} = 70 \text{ cm}$

D $\overline{O_1 O_2} = 5 \text{ cm}$

• Question 4

On désire utiliser le système optique constitué par l'association de la lentille L_1 suivie de la lentille L_2 , pour transformer un faisceau cylindrique de rayons parallèles à l'axe optique et de diamètre d à l'entrée du système, en un faisceau cylindrique de rayons parallèles à l'axe optique et de diamètre D à la sortie du système. Calculer la distance $\overline{O_1 O_2}$ qui permet de réaliser un tel système.

A $\overline{O_1 O_2} = 30 \text{ cm}$

B $\overline{O_1 O_2} = 10 \text{ cm}$

C $\overline{O_1 O_2} = 40 \text{ cm}$

D $\overline{O_1 O_2} = 20 \text{ cm}$

• Question 5

Calculer le rapport $\frac{D}{d}$ des diamètres.

A $\frac{D}{d} = 1$

B $\frac{D}{d} = 2$

C $\frac{D}{d} = 3$

D $\frac{D}{d} = 4$

→ QCM 5 Lunette de Galilée

• Question 1

On désigne respectivement par f et f' les distances focales objet et image d'une lentille mince L de centre optique O et de foyers principaux objet F et image F' . Un objet $\overline{AB}$ est disposé dans un plan de front de la lentille qui en donne une image $\overline{A'B'}$. Établir la relation de conjugaison de Newton dans laquelle les positions sur l'axe optique A et A' des plans de front contenant l'objet et l'image sont respectivement repérées par rapport aux foyers objet F et image F' .

A $\frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}} = \frac{f}{f'}$

B $\frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}} = \frac{f'}{f}$

C $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -ff'$

D $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'$

• Question 2

Exprimer la relation de Newton donnant le grandissement transversal $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ de la lentille en fonction de la position $\overline{FA}$ de l'objet par rapport au foyer objet F et de la distance focale image f' .

A $G_t = \frac{\overline{FA}}{f'}$

B $G_t = \frac{f'}{\overline{FA}}$

C $G_t = -\frac{f'}{\overline{FA}}$

D $G_t = -\frac{\overline{FA}}{f'}$

• Question 3

Une lunette de Galilée destinée à observer les objets terrestres est constituée d'un objectif convergent assimilé à une lentille mince L_1 de centre optique O_1 , de distance focale image $f'_1 = 25$ cm et d'un oculaire divergent que l'on peut également assimiler à une lentille mince L_2 de centre optique O_2 et de distance focale image $f'_2 = -5$ cm. Les axes optiques des deux lentilles sont confondus et définissent l'axe optique de l'instrument.

Calculer numériquement la distance $e = O_1O_2$ entre les centres optiques des lentilles pour que le système soit afocal, c'est-à-dire pour qu'un observateur

dont l'œil est normal puisse voir, en accommodant à l'infini, l'image que donne la lunette d'un objet situé à l'infini.

A $e = 10 \text{ cm}$

B $e = 20 \text{ cm}$

C $e = 30 \text{ cm}$

D $e = 25 \text{ cm}$

• Question 4

Un rayon lumineux entre dans l'instrument en faisant un angle α_1 avec l'axe optique. Exprimer l'angle α_2 que fait avec l'axe optique le rayon qui émerge de la lunette.

A $\alpha_2 = -\frac{f'_1}{f'_1 + f'_2} \alpha_1$

B $\alpha_2 = \frac{f'_1 + f'_2}{f'_2} \alpha_1$

C $\alpha_2 = -\frac{f'_2}{f'_1} \alpha_1$

D $\alpha_2 = -\frac{f'_1}{f'_2} \alpha_1$

• Question 5

On définit le grossissement G d'un instrument par le rapport $G = \alpha_i / \alpha_o$ de l'angle α_i sous lequel un observateur voit un objet à travers l'instrument sur l'angle α_o sous lequel il voit le même objet à l'œil nu. Calculer le grossissement G de la lunette dans le cas de l'observation d'un objet à l'infini par un œil normal qui n'accomode pas.

A $G = 5$

B $G = -2$

C $G = -4$

D $G = 6$

• Question 6

La lunette étant toujours afocale, un objet de dimension $\overline{AB}$ est disposé dans le plan de front orthogonal à l'axe optique à une distance finie $\overline{O_1A}$ de l'objectif de la lunette. L'objectif en donne une image intermédiaire $\overline{A'B'}$ reprise par l'oculaire qui en donne une image définitive $\overline{A''B''}$ observable par un œil qui doit maintenant accommoder. Calculer dans ces conditions le grandissement transversal de la lunette défini par le rapport $\gamma = \overline{A''B''} / \overline{AB}$.

A $\gamma = -\frac{f'_2 + f'_1}{f'_1}$

B $\gamma = -\frac{f'_2}{f'_1 + f'_2}$

C $\gamma = -\frac{f'_2}{f'_1}$

D $\gamma = -\frac{f'_1}{f'_2}$

→ QCM 1 Miroir sphérique

• Question 1 : réponse **B**

Vergence d'un miroir sphérique

La vergence V du miroir sphérique est définie par :

$$V = -\frac{2n}{SC}$$

où :

- n désigne l'indice de réfraction du milieu incident (espace objet réel), qui est également le milieu émergent (espace image réelle);
- le point C est le **centre** du miroir sphérique;
- le point S , appelé **sommet**, est l'intersection du miroir avec l'axe optique;
- $R = \overline{SC}$ est le **rayon algébrique** du miroir, exprimé en mètre (m);
- V s'exprime en **dioptrie** (δ).

→ Réponse **B**

On attire l'attention sur une extrapolation des résultats de la lentille mince au miroir sphérique, qui est très fréquente chez les étudiants, mais s'avère totalement fausse :

1) dans le cas de la lentille mince, la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

où A et A' désignent respectivement les intersections avec l'axe optique des plans de front contenant l'objet et l'image.

La vergence V de la lentille vaut : $V = \frac{1}{f'}$.

2) dans le cas du miroir sphérique, la relation de conjugaison s'écrit :

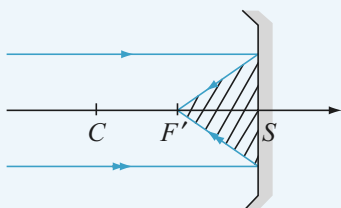
$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC} \quad (1)$$

mais attention :

$$V \neq \frac{2}{SC}$$

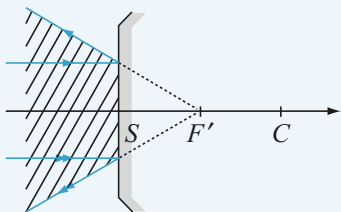


Le signe de la vergence peut d'ailleurs aisément être vérifié pour les deux types de miroirs sphériques.



- **Le miroir concave**, qui est **convergent** car il transforme un faisceau incident cylindrique de rayons parallèles à l'axe optique en un faisceau convergent vers F' .

Le rayon est négatif : $R = \overline{SC} < 0$



- **Le miroir convexe**, qui est **divergent** car il transforme un faisceau incident cylindrique de rayons parallèles à l'axe optique en un faisceau divergent semblant provenir de F' .

Le rayon est positif : $R = \overline{SC} > 0$

Vergence d'un système optique

Un système optique, quel qu'il soit, est :

- **convergent** si sa vergence est **positive** ;
- **divergent** si sa vergence est **négative** ;
- **afocal** si sa vergence est **nulle**.

Pour un dioptre convergent par exemple : $\overline{SC} < 0$ et $V = -\frac{2n}{\overline{SC}} > 0$.



Pour terminer, signalons que la réponse D devait être éliminée d'emblée, car c'est la seule qui propose une relation non homogène du point de vue dimensionnel : la vergence s'exprime en dioptrie (δ), et $1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$.

• **Question 2 : réponse C**

La relation de conjugaison du miroir sphérique est :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

- Le foyer principal image F' est l'image d'un point objet A situé à l'infini sur l'axe optique, donc : $\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$
- Le foyer principal objet F a pour image un point A' situé à l'infini sur l'axe optique, donc : $\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$

F et F' sont donc confondus et situés au milieu du segment $[SC]$.

→ **Réponse C**

• **Question 3 : réponse A**

Notons $\overline{AB}$ l'objet dont le miroir sphérique donne une image $\overline{A'B'}$.

L'énoncé fournit deux informations :
$$\begin{cases} \overline{SA} = -10 \text{ m} \\ G = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Relations du miroir sphérique avec origine au sommet, dans le cas où $n = 1$

• Relation de **conjugaison** :
$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} = -V \quad (2)$$

• Relation de **grandissement** :
$$G = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \quad (3)$$

D'après la relation (3) : $-\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{1}{5}$ soit $\overline{SA'} = -\frac{\overline{SA}}{5} = 2 \text{ m}$

D'après la relation (2) : $V = -\left(\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) = -0,4 \delta$

→ Réponse **A**

• Question 4 : réponse **C**

La vergence d'un miroir sphérique placé dans l'air ($n = 1$) est : $V = -\frac{2}{\overline{SC}}$.

La discussion sur le signe de V n'offre que deux possibilités :

- soit $V > 0$ (miroir convergent) et dans ce cas $\overline{SC} < 0$. Le centre C est situé dans le milieu où se propage la lumière, donc le miroir est concave
- soit $V < 0$ (miroir divergent) et dans ce cas $\overline{SC} > 0$. Le centre C n'est pas situé dans le milieu où se propage la lumière, donc le miroir est convexe.



On peut dès lors exclure les réponses **A** et **B** correspondant à des miroirs qui ne peuvent pas exister.

La vergence de ce miroir a été calculée à la question 3 et vaut : $V = -0,4 \delta$.
Ce miroir est donc divergent et convexe.

→ Réponse **C**



Un bon moyen mnémotechnique permet de ne plus confondre les termes « concave » et « convexe » : la face réfléchissante d'un miroir concave est creuse, tout comme la cave d'une habitation.

• Question 5 : réponse **A**

La relation de conjugaison du miroir sphérique est :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad (1)$$

où A et A' désignent respectivement les intersections avec l'axe optique des plans de front contenant l'objet et l'image.

Dans le cas présent $A = C$, donc, d'après la relation (1) :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SC}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SC}} \quad \text{et} \quad \overline{SA'} = \overline{SC} \quad \text{donc} \quad A' = C.$$

L'image se trouve alors dans le même plan passant par C .

→ Réponse **A**



- On pouvait éliminer d'emblée la réponse B : l'objet n'étant pas situé à l'infini, son image ne peut pas être située dans le plan focal image du miroir.
- De même, la réponse C est impossible : l'objet n'étant pas situé dans le plan focal objet du miroir, son image ne peut être rejetée à l'infini.

• **Question 6 : réponse D**

La relation de grandissement est : $G = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$. Compte tenu du fait que $A = A' = C$, cette relation donne :

$$G = -\frac{\overline{SC}}{\overline{SC}} = -1$$

→ Réponse **D**

→ QCM 2 Appareil photographique

• **Question 1 : réponse C**

Relation de conjugaison d'une lentille mince plongée dans l'air

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

avec $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$. O désigne le centre optique de la lentille, A et A' les intersections respectives avec l'axe optique des plans de front contenant l'objet et l'image.

$f'_a = 0,135$ m et $p = -3$ m donc :

$$p' = \frac{f'_a p}{f'_a + p} = \frac{0,135 \times (-3)}{0,135 - 3} = 0,141 \text{ m} = 141 \text{ mm} \rightarrow \text{Réponse C}$$



Cette simple application du cours est destinée à tester la vigilance du candidat concernant :

- l'algébrisation : l'oubli du signe de p conduit à $p' = 129$ mm (réponse B) ;
- les unités : on peut travailler aussi bien en mètre qu'en millimètre, pour peu qu'on respecte la cohérence des unités. Il est toutefois plus prudent de préférer le système international d'unités qui ne réserve jamais aucune mauvaise surprise. La réponse D correspond à une manipulation erronée des puissances de dix.

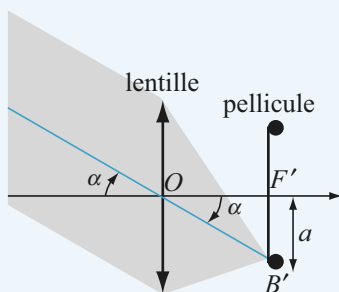
Propriété des déplacements de l'objet et de l'image, applicable à tout système optique (hors miroir)

Tout déplacement de l'objet sur l'axe optique entraîne un déplacement de l'image dans le même sens (mais bien sûr pas de la même distance !).



Dans le cas présent, puisque l'image d'un objet situé à l'infini se forme sur le plan focal image de la lentille, l'image d'un objet situé à 3 m se formera à droite du plan focal image. Donc $p' > 135$ mm, ce qui élimine d'entrée de jeu les réponses A et B.

• Question 2 : réponse A



La mise au point se faisant sur le ciel nocturne à l'infini, la pellicule est située dans le plan focal image de l'appareil photographique. En chaque point de la pellicule se forme l'image d'un point du ciel. Les rayons émergents qui y concourent correspondent à des rayons incidents qui ont tous la même inclinaison par rapport à l'axe optique. Cette inclinaison est déterminée à l'aide du seul rayon qui ne soit pas

dévié à la traversée de la lentille, celui passant par le centre optique O .

Dans le triangle $(AF'B')$ rectangle en F' : $\tan \alpha = \frac{a}{f'_a}$ soit $\alpha = \arctan\left(\frac{a}{f'_a}\right)$

- Suivant le petit axe de la pellicule : $a = 12 \text{ mm}$, soit $\alpha = 5,08^\circ$ donc le champ angulaire photographié vaut : $2\alpha = 10,16^\circ$.
- Suivant le grand axe de la pellicule : $a = 18 \text{ mm}$, soit $\alpha = 7,59^\circ$ donc le champ angulaire photographié vaut : $2\alpha = 15,18^\circ$.

Finalement, le champ photographié vaut $10^\circ \times 15^\circ$.

→ Réponse **A**

On veillera à ne pas confondre axe et demi-axe, ni angle et demi-angle.

On évitera d'approximer la tangente de l'angle à la valeur de l'angle en radian car les angles proposés ne satisfont pas tous à une telle approximation.



Le rapport des angles de la réponse D est de $4/3$ et ne correspond pas au rapport $3/2$ du format de la pellicule : cette réponse est évidemment fausse.

• Question 3 : réponse **C**

Notons $R_L = 1\,740 \text{ km}$ le rayon de la Lune et $d_L = 384\,000 \text{ km}$ la distance Lune–Objectif. En adoptant les mêmes notations qu'à la question précédente :

$$\theta = 2\alpha = 2 \arctan\left(\frac{R_L}{d_L}\right) = 0,519^\circ = 31' \quad \rightarrow \text{Réponse } \mathbf{C}$$

Cet angle étant très petit, il est possible d'approximer sa tangente à la valeur de l'angle en radian :

$$\theta = 2\alpha \approx 2 \frac{R_L}{d_L} = 9,06 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,519^\circ = 31'$$

On veillera à ne pas confondre radian et degré.

On rappelle que le « diamètre apparent » est un angle et non pas une distance. Par ailleurs, les minutes d'arc (notées ') sont comptées dans la base hexadécimale ($1^\circ = 60'$) tout comme les minutes de temps (notées min). Les secondes d'arc ne sont plus en vigueur.



- La réponse B correspond à une confusion entre diamètre apparent et rayon apparent, engendrant une erreur d'un facteur 2.
- La réponse D correspond à une confusion entre minute d'arc et seconde d'arc.

• Question 4 : réponse B

Notons d_0 le diamètre du disque lunaire sur la pellicule.

On peut considérer que la Lune est située à l'infini et reconduire à l'identique le raisonnement de la question 1 :

$$\theta/2 = \arctan\left(\frac{d_0/2}{f'_a}\right) \approx \frac{d_0/2}{f'_a} \quad \text{d'où : } d_0 = \theta f'_a = 9,06 \cdot 10^{-3} \times 135 = 1,22 \text{ mm.}$$

Le tirage sur papier s'accompagne d'un grandissement : $G = \frac{100}{24} = \frac{25}{6}$.

Finalement, le diamètre d du disque lunaire sur le papier vaut :

$$d = G d_0 = 5,1 \text{ mm}$$

→ Réponse B



Cette question ne comporte aucune difficulté d'ordre calculatoire, mais teste la capacité d'analyse du candidat qui doit établir une distinction entre le diamètre du disque lunaire sur la pellicule, et celui sur le papier. Lecture attentive de l'énoncé et clarté dans les notations sont les fondements d'une bonne analyse.

• Question 5 : réponse B

L'objectif du projecteur satisfait aux deux relations des lentilles minces avec origine au centre optique O :

$$\bullet \text{ la relation de conjugaison : } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_p} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ la relation de grandissement : } G = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (2)$$

$$\text{La relation (2) donne : } G = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1, \text{ soit : } \overline{OA'} = -\overline{OA} \quad (3)$$

On sait par ailleurs que : $\overline{AA'} = 0,2 \text{ m}$.

D'après la relation de Chasles et la relation (3) :

$$\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = -2\overline{OA} = 0,2 \text{ m} \quad \text{d'où : } \overline{OA} = -0,1 \text{ m.}$$

Enfin, d'après la relation (1) :

$$f'_p = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} = -\frac{\overline{OA}^2}{2\overline{OA}} = -\frac{\overline{OA}}{2} = -\frac{(-0,1)}{2} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

→ Réponse B



Une fois de plus, une lecture active de l'énoncé est recommandée. On sera particulièrement attentif ici au fait que l'image est repérée par rapport à l'objet et non pas par rapport au centre optique de la lentille comme cela est habituellement le cas.

Toute erreur de signe mène évidemment à la catastrophe. Comme souvent en optique, elle ne se traduit pas par un simple changement de signe du résultat, ce qui la rend plus difficile à détecter. La seule parade, c'est de prendre son temps, sans minimiser la question, d'être concentré ... et de vérifier.

À ce titre, la meilleure des vérifications consiste à chercher un autre cheminement logique. Ainsi, la méthode de Silbermann, utilisée en travaux pratiques, fournit un résultat immédiat, pour peu qu'on l'ait retenu

Lorsque objet et image sont distants de $4f'$, le grandissement vaut -1.

$$\text{Donc : } f'_p = \frac{0,2}{4} = 0,05 \text{ m.}$$

• Question 6 : réponse **C**

On réutilise les relations (1) et (2) de la question précédente avec cette fois-ci :

$$f'_p = 0,05 \text{ m} \quad \text{et} \quad \overline{AA'} = 4,5 \text{ m}$$

La relation (1) s'écrit, à l'aide de la décomposition de Chasles :

$$\frac{1}{\overline{OA} + \overline{AA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_p}$$

et donne, après transformation, l'équation du 2nd degré en $\overline{OA}$:

$$\overline{OA}^2 + \overline{AA'} \cdot \overline{OA} + \overline{AA'} \cdot f'_p = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut :

$$\Delta = \overline{AA'}^2 - 4\overline{AA'} \cdot f'_p = 4,5^2 - 4 \times 4,5 \times 0,05 = 19,35 > 0$$

et on obtient alors deux solutions distinctes :

$$\overline{OA} = \frac{-4,5 \pm \sqrt{19,35}}{2}, \quad \text{soit : } \overline{OA}_1 = -4,4494 \text{ m} \quad \text{et} \quad \overline{OA}_2 = -0,0506 \text{ m.}$$



Le projecteur étant beaucoup plus proche de la diapositive (l'objet) que de l'écran (où se forme l'image), la seule solution acceptable est :

$$\overline{OA} = -0,0506 \text{ m}, \quad \text{d'où :} \quad \overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = 4,4494 \text{ m}$$

Remarquons au passage qu'en vertu du principe de retour inverse de la lumière, objet et image jouent des rôles symétriques, et que les deux solutions de l'équation précédente sont forcément, au signe près, les positions de l'objet et de l'image.

$$\text{D'après la relation (2) :} \quad G = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{4,4494}{-0,0506} = -87,9$$

Dès lors, la taille de l'image sur l'écran est :

$$(24 \times 87,9) \times (36 \times 87,9) \text{ mm}^2 = \mathbf{2,1 \times 3,2 \text{ m}^2}$$

→ **Réponse C**

Il est possible, à l'aide d'un raisonnement simple, d'obtenir beaucoup plus rapidement une valeur approchée du grandissement. En effet, l'image située sur l'écran étant à grande distance de la lentille du projecteur, la diapositive est quasiment placée au foyer objet, ce qui donne :

$$\overline{OA} = -0,05 \text{ m} \quad \text{et} \quad \overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = 4,45 \text{ m}$$

$$\text{soit :} \quad G = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{4,45}{-0,05} = -89.$$

$$\text{Finalement :} \quad (24 \times 89) \times (36 \times 89) \text{ mm}^2 = 2,1 \times 3,2 \text{ m}^2$$

L'approximation était justifiée.

→ QCM 3 Loupe

• Question 1 : réponse D

La relation de grandissement de la loupe s'écrit : $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ (1)
D'après la relation de Chasles :

$$\overline{OA'} = \overline{OC} + \overline{CA'} = \delta - d \quad (2)$$

La relation de conjugaison de la loupe s'écrit : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$

Isolons $\overline{OA}$: $\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'} = \frac{f' - \overline{OA'}}{f' \cdot \overline{OA'}}$

d'où : $\overline{OA} = \frac{f' \cdot \overline{OA'}}{f' - \overline{OA'}} = \frac{f'(\delta - d)}{d + f' - \delta}$ (3)

En reportant (2) et (3) dans la relation (1), on obtient l'expression désirée :

$$G_t = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{d + f' - \delta}{f'} \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$



Lorsque $d = d_M = \infty$ (objet AB situé dans le plan focal objet de L et image $A'B'$ rejetée à l'infini) la taille $\overline{A'B'}$ est infinie (il suffit pour s'en convaincre d'utiliser le rayon issu de B passant par O) donc $G_t = \infty$. Cela exclut les expressions de G_t faisant intervenir d au dénominateur, c'est-à-dire les réponses B et C.

• Question 2 : réponse C

Dans le triangle $(CA'B')$ rectangle en A' : $\tan \theta' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{CA'}}$

Dans le triangle (CAB) rectangle en A : $\tan \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$

On veillera à respecter l'algébrisation des angles, lesquels sont tous deux négatifs dans le cas de la figure compte tenu de l'orientation de l'axe optique vers la droite, et de l'axe vertical vers le haut.

Dans le cadre de l'approximation des petits angles : $\tan \theta \approx \theta$ et $\tan \theta' \approx \theta'$
Le grossissement de la loupe s'écrit alors :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{CA'}}}{\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = G_t \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = G_t \cdot \frac{\overline{CO} + \overline{OA}}{\overline{CA'}}$$

Reportons l'expression (3) de $\overline{OA}$ obtenue à la question 1 dans le résultat précédent :

$$G = G_t \cdot \frac{\overline{CO} + \frac{f'(\delta - d)}{d + f' - \delta}}{\frac{CA'}{f'}} = \frac{d + f' - \delta}{f'} \cdot \frac{-\delta + \frac{f'(\delta - d)}{d + f' - \delta}}{-d} = \frac{-\delta(d + f' - \delta) + f'(\delta - d)}{-f'd}$$

On obtient finalement, après simplification :

$$G = \frac{d(f' + \delta) - \delta^2}{f'd} = \frac{f' + \delta}{f'} - \frac{\delta^2}{f'd}$$

→ Réponse **C**



Notons que d'un énoncé à l'autre (QCM 2 et QCM 3), donc d'une année à l'autre, le grandissement est noté tantôt G tantôt G_t , et que G représente tantôt le grandissement tantôt le grossissement. Voilà qui doit inciter le candidat à avoir une lecture attentive, et à faire preuve de vigilance et de souplesse.

• Question 3 : réponse **B**

Dans l'expression du grossissement G obtenue à la question précédente, le seul terme variable est $\frac{\delta^2}{f'd}$. Ce terme est par ailleurs positif car f' et d sont positifs.

G est donc maximal lorsque $\frac{\delta^2}{f'd}$ s'annule, c'est-à-dire quand $d = \infty$.

→ Réponse **B**

• Question 4 : réponse **D**

Cette question est une simple application des résultats des questions 2 et 3 :

$$G_{\max} = \lim_{d \rightarrow \infty} G = \frac{f' + \delta}{f'}$$

→ Réponse **D**

• Question 5 : réponse **A**

D'après la question 4 : $G(\infty) = G_{\max} = \frac{f' + \delta}{f'}$

D'après la question 2 : $G(d_m) = \frac{f' + \delta}{f'} - \frac{\delta^2}{f'd_m}$

Donc : $\Delta G = G(\infty) - G(d_m) = \frac{\delta^2}{f'd_m}$

→ Réponse **A**

• **Question 6 : réponse C**

Nous avons déterminé le grossissement maximum à la question 4 :

$$G_{\max} = \frac{f' + \delta}{f'}$$

Donc : $f'_0 = \frac{\delta}{G_{\max} - 1} = \frac{0,18}{10 - 1} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$ → **Réponse C**

→ **QCM 4 Doublet**

• **Question 1 : réponse A**

La lentille L_1 satisfait aux deux relations des lentilles minces avec origine au centre optique O_1 :

• la relation de conjugaison : $\frac{1}{\overline{O_1 A_i}} - \frac{1}{\overline{O_1 A_o}} = \frac{1}{f_1}$ (1)

• la relation de grandissement : $G_t = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_o B_o}} = \frac{\overline{O_1 A_i}}{\overline{O_1 A_o}}$ (2)

La relation (2) donne : $G_t = \frac{\overline{O_1 A_i}}{\overline{O_1 A_o}} = \frac{1}{2}$ soit : $\overline{O_1 A_i} = \frac{1}{2} \overline{O_1 A_o}$ (3)

En remplaçant dans la relation (1), on obtient :

$$\frac{2}{\overline{O_1 A_o}} - \frac{1}{\overline{O_1 A_o}} = \frac{1}{f_1} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{O_1 A_o}} = \frac{1}{f_1}$$

Donc : $\overline{O_1 A_o} = f_1 = -20 \text{ cm}$ → **Réponse A**

L'objet est donc confondu avec le foyer image de la lentille L_1 .

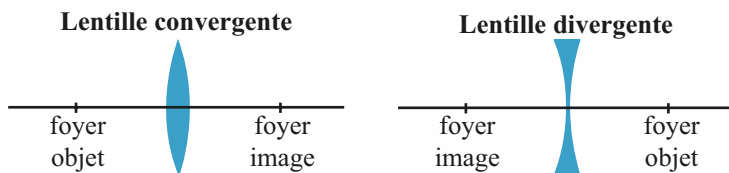
Attention : ici l'énoncé utilise la notation f_1 au lieu de f'_1 pour désigner la distance focale image de L_1 , ce qui peut prêter à confusion.

Attention à ne pas confondre foyers objet et image de la lentille, ce qui aurait évidemment des conséquences désastreuses !



Foyers d'une lentille

Les deux foyers d'une lentille **convergente** sont **réels**, tandis que les deux foyers d'une lentille **divergente** sont **virtuels**, comme l'indique la figure ci-dessous.



• Question 2 : réponse B

La relation (3) établie à la question précédente donne directement le résultat :

$$\overline{O_1 A_i} = \frac{1}{2} \overline{O_1 A_o} = -10 \text{ cm}$$

→ Réponse B



Le grandissement transversal étant positif, l'objet $A_o B_o$ et l'image $A_i B_i$ sont nécessairement placés du même côté de la lentille, comme l'indique sur une construction le rayon issu de B_o passant par le centre optique O_1 . Il en découle que les réponses C et D sont impossibles.

La réponse A est également à éliminer, car elle correspond à une image $A_i B_i$ confondue avec l'objet $A_o B_o$, ce qui, pour une lentille, n'est possible que si l'objet est dans le plan de la lentille passant par O_1 .

• Question 3 : réponse C

La présence de deux lentilles nécessite l'utilisation de notations rigoureuses.

Notons :

- $A_o B_o$ l'objet primitif ;
- $A_i B_i$ l'image de $A_o B_o$ à travers la lentille L_1 ($A_i B_i$ joue également le rôle d'objet pour la lentille L_2) ;
- $A_2 B_2$ l'image de $A_i B_i$ à travers L_2 . $A_2 B_2$ est l'image finale donnée par le doublet de lentilles : elle est placée dans le plan de l'écran E .

La relation de conjugaison de la lentille L_2 s'écrit alors : $\frac{1}{\overline{O_2 A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_i}} = \frac{1}{f_2}$.



Déterminons $\overline{O_2A_i}$:

$$\frac{1}{\overline{O_2A_i}} = \frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{f_2} = \frac{f_2 - \overline{O_2A_2}}{f_2 \cdot \overline{O_2A_2}}$$

$$\text{d'où: } \overline{O_2A_i} = \frac{f_2 \cdot \overline{O_2A_2}}{f_2 - \overline{O_2A_2}} = \frac{40 \times 80}{40 - 80} = -80 \text{ cm}$$

L'application numérique précédente constitue l'exception type, et déroge à la règle qui veut que toute valeur numérique soit exprimée dans le système international d'unités. L'expression littérale de $\overline{O_2A_i}$ faisant apparaître ici un rapport de distances, le calcul peut être mené avec n'importe quel multiple ou sous-multiple du mètre, pour peu qu'il y ait bien sûr homogénéité d'unités entre numérateur et dénominateur. Si le candidat ne maîtrise pas ce genre de subtilité, il est prudent qu'il évite systématiquement de s'écarter du système international d'unités.

Remarquons par ailleurs que la lentille L_2 est située à 2 distances focales image de l'écran, donc de l'image A_2B_2 . Ce cas de figure correspond à une configuration très classique qu'il est conseillé de connaître.

Lorsqu'un objet est situé à 2 distances focales image devant une lentille convergente, l'image est située à 2 distances focales image derrière la lentille, et le grandissement transversal vaut -1 (méthode de Silbermann en focométrie).

Ce raisonnement permet d'obtenir directement $\overline{O_2A_i}$: $\overline{O_2A_i} = -\overline{O_2A_o} = -80 \text{ cm}$. $\overline{O_1O_2}$ est obtenu finalement à l'aide de la relation de Chasles, et du résultat de la question 2 :

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1A_i} + \overline{A_iO_2} = \overline{O_1A_i} - \overline{O_2A_i} = -10 - (-80) = 70 \text{ cm} \quad \rightarrow \text{Réponse C}$$

• Question 4 : réponse D

Système afocal

Seul un système **afocal** peut transformer un faisceau incident de rayons parallèles en un faisceau émergent de rayons également parallèles. Le qualificatif « afocal » signifie que le système $\{L_1, L_2\}$ n'a pas de foyers, ce qui revient à dire que ses foyers F et F' sont rejetés à l'infini (attention à ne pas confondre F et F' avec les foyers F_1 et F'_1 de la lentille L_1 ou avec les foyers F_2 et F'_2 de la lentille L_2).



Réutilisons les notations introduites au début de la question précédente pour désigner l'objet primitif A_oB_o , l'image intermédiaire A_iB_i et l'image finale A_2B_2 . Puisque le faisceau incident est constitué de rayons parallèles à l'axe optique, l'objet A_oB_o est situé à l'infini. Donc A_i sera confondu avec F'_1 .

- Puisque le faisceau émergent est constitué de rayons parallèles à l'axe optique, l'image finale A_2B_2 est située à l'infini. Donc A_i sera confondu avec F_2 .

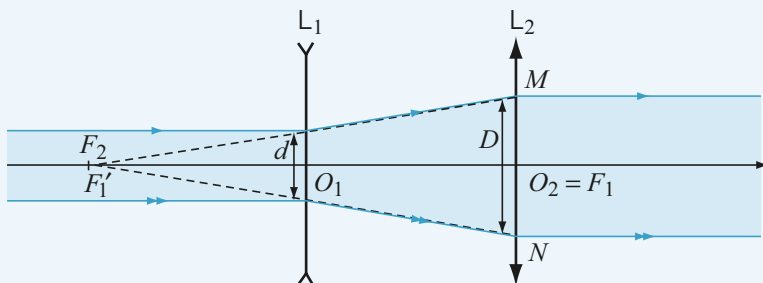
Par conséquent : $F'_1 = F_2$ et :

$$\begin{aligned}\overline{O_1O_2} &= \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = \overline{O_1F'_1} - \overline{O_2F_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{O_2F'_2} \\ &= -20 + 40 = \mathbf{20 \text{ cm}}\end{aligned}$$

→ Réponse **D**

• Question 5 : réponse **B**

La résolution de cette question s'appuie une construction graphique. On a représenté sur la figure ci-dessous le faisceau cylindrique incident, et son devenir à la traversée des deux lentilles constituant le doublet afocal.



Appliquons le théorème de Thalès dans le triangle (F'_1MN) :

$$\frac{D}{d} = \frac{\overline{F_2O_2}}{\overline{F'_1O_1}} = \frac{f_2}{-f_1} = \frac{40}{20} = 2$$

→ Réponse **B**

Le bon placement des foyers des deux lentilles sur la figure est impératif, et évitera les amalgames dus à la précipitation du candidat. Il convient effectivement de faire ici la distinction entre différents doublets afocaux.

- La lunette astronomique, constituée de deux lentilles convergentes. Son grossissement est négatif et supérieur à 1 en valeur absolue. Elle donne une image plus grosse que l'objet mais inversée, ce qui n'est pas préjudiciable à l'observation des étoiles.





- La lunette de Galilée, constituée d'une lentille convergente suivie d'une lentille divergente. Son grossissement est positif et supérieur à 1. Elle donne une image droite plus grosse que l'objet, et est donc appropriée à l'observation d'objets éloignés sur Terre.
- Le doublet de ce QCM, qui est en définitive une lunette de Galilée utilisée à l'envers. Son grossissement est positif et inférieur à 1. Elle donne une image droite plus petite que l'objet, ce qui ne présente évidemment aucun intérêt !

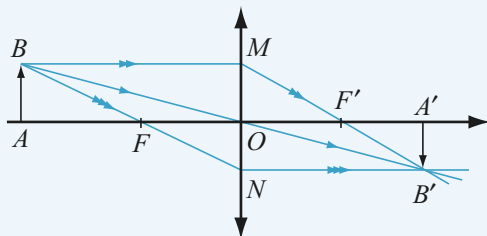
Attention à ne pas confondre le grossissement avec le rapport du diamètre du faisceau cylindrique de sortie sur le diamètre du faisceau cylindrique d'entrée !

→ QCM 5 Lunette de Galilée

• Question 1 : réponse **D**

Il n'est pas nécessaire de mémoriser la relation de conjugaison de Newton avec origine aux foyers. On la retrouve aisément à l'aide de considérations géométriques sur les triangles semblables.

Représentons sur la figure ci-contre la construction des principaux rayons servant à déterminer la position de l'image $A'B'$ d'un objet AB donné.



- Les triangles (FAB) et (FON) étant semblables :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FO}} \quad \text{donc :} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \quad (1)$$

- De même, les triangles $(F'A'B')$ et $(F'OM)$ étant semblables :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{F'O}} \quad \text{donc :} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \quad (2)$$

En confrontant les relations (1) et (2), on obtient :

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \quad \text{soit} \quad \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{FO} \cdot \overline{F'O} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'} = f \cdot f' \quad \rightarrow \text{Réponse } \mathbf{D}$$



L'étude d'un cas particulier simple permettait d'éliminer d'office deux solutions.

Lorsque $A = F$, l'image A' est rejetée à l'infini, d'où : $\frac{\overline{FA}}{F'A'} = \frac{0}{\infty} = 0$.

Les réponses A et B sont donc fausses.

• Question 2 : réponse B

La relation de Newton donnant le grandissement transversal en fonction de $\overline{FA}$ et de f' est directement déduite de la relation (1) :

$$G_t = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

→ Réponse B

• Question 3 : réponse B

Système afocal

Seul un système **afocal** peut donner d'un objet situé à l'infini une image également située à l'infini. Le qualificatif « afocal » signifie que le système $\{L_1, L_2\}$ n'a pas de foyers, ce qui revient à dire que ses foyers F et F' sont rejetés à l'infini (attention à ne pas confondre F et F' avec les foyers F_1 et F'_1 de la lentille L_1 ou avec les foyers F_2 et F'_2 de la lentille L_2).

La présence de deux lentilles nécessite l'utilisation de notations rigoureuses. Notons :

- AB l'objet primitif ;
- $A'B'$ l'image de AB à travers la lentille L_1 . $A'B'$ joue également le rôle d'objet pour la lentille L_2 ;
- $A''B''$ l'image de $A'B'$ à travers L_2 . $A''B''$ est l'image finale donnée par la lunette.
- Puisque AB est situé à l'infini, A' est confondu avec F'_1 .
- Puisque $A'B''$ est situé à l'infini, A'' est confondu avec F_2 .

Par conséquent : $F'_1 = F_2$ et :

$$e = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = \overline{O_1F'_1} - \overline{O_2F_2} = f'_1 + f'_2 = 25 - 5 = 20 \text{ cm}$$

→ Réponse B

• **Question 4 : réponse D**

La réussite de cette question nécessite la maîtrise du tracé des rayons lumineux.

**Propriétés des trois rayons principaux, valables aussi bien pour une lentille convergente que pour une lentille divergente**

- Un rayon incident passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié.
- Un rayon incident parallèle à l'axe optique donne un rayon émergent dont le support passe par le foyer image de la lentille.
- Un rayon incident dont le support passe par le foyer objet de la lentille donne un rayon émergent parallèle à l'axe optique.

Tracé d'un rayon quelconque

Pour tracer le devenir d'un **rayon incident quelconque** ne correspondant à aucun des trois rayons précédents, on a recours aux **foyers secondaires objet et image**, qui sont des points situés respectivement dans les plans focaux objet et image de la lentille. On utilise alors indifféremment l'une des deux procédures suivantes, aboutissant au même résultat :

Procédure 1

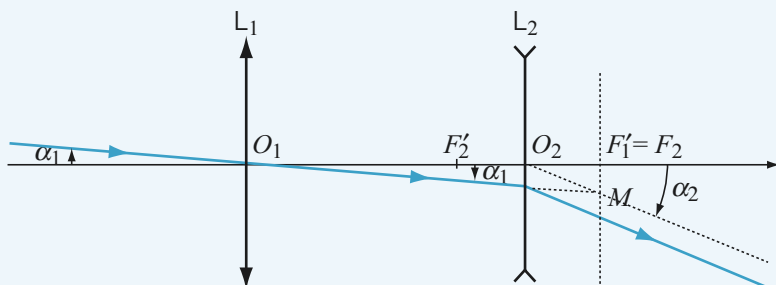
On trace un second rayon incident, parallèle au premier et passant par le centre optique de la lentille. Ce second rayon traverse la lentille sans être dévié et coupe le plan focal image de la lentille en un **foyer secondaire image M'** . Les deux rayons incidents étant parallèles entre eux, les supports des rayons émergents qui leur correspondent se coupent en M' .

Procédure 2

On détermine l'intersection M du support du rayon incident avec le plan focal objet de la lentille : ce point sera le **foyer secondaire objet**. On trace un second rayon incident dont le support passe par M et par le centre optique de la lentille. Ce second rayon traverse la lentille sans être dévié. Les supports des deux rayons incidents se coupant en M , les rayons émergents qui leur correspondent sont parallèles entre eux. Ces deux procédures sont valables aussi bien pour une lentille convergente que pour une lentille divergente.

Revenons maintenant à la question.

Pour la résoudre, on considère un rayon incident incliné d'un angle α_1 par rapport à l'axe optique et passant par le centre optique O_1 de L_1 . Ce rayon traverse L_1 sans être dévié. Pour déterminer la direction du rayon émergent après la traversée de L_2 , on a utilisé sur la construction ci-dessous la procédure 2 ayant recours au foyer secondaire objet M . La construction est bien sûr plus délicate avec la lentille divergente L_2 qu'elle ne l'aurait été avec une lentille convergente, le foyer F_2 et certains prolongements de rayons étant virtuels.



Considérons les triangles $(O_1F'_1M)$ et $(O_2F'_1M)$: tous deux sont rectangles en F'_1 et possèdent en commun le côté F'_1M , qui représente le côté opposé par rapport aux angles α_1 et α_2 .

On peut alors écrire :

$$\overline{F'_1M} = \overline{O_1F'_1} \cdot \tan \alpha_1 = \overline{O_2F'_1} \cdot \tan \alpha_2 \quad \text{soit} \quad \tan \alpha_2 = \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_2F'_1}} \cdot \tan \alpha_1 = -\frac{f'_1}{f'_2} \cdot \tan \alpha_1.$$

La lunette travaillant dans les conditions de Gauss, les angles α_1 et α_2 sont petits, et leurs tangentes peuvent être approximées aux valeurs de ces angles exprimées en radian :

$$\tan \alpha_1 \approx \alpha_1 \quad \text{et} \quad \tan \alpha_2 \approx \alpha_2, \quad \text{d'où :} \quad \alpha_2 = -\frac{f'_1}{f'_2} \cdot \alpha_1$$

→ Réponse **D**



Le grossissement d'une lunette de Galilée, égal ici à $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, est forcément positif, puisqu'elle est destinée à l'observation d'objets éloignés sur Terre. Les réponses A et B, qui proposent des grossissements négatifs, sont donc fausses.

La réponse C ne convient pas non plus : son grossissement est bien positif, mais inférieur à 1, ce qui n'est pas réaliste pour un instrument optique dont l'objectif principal est de grossir.

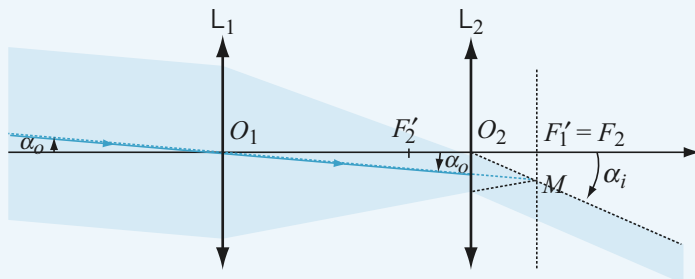
Rappelons que le fait d'éliminer trois réponses sur quatre ne permet pas de faire l'économie d'une résolution dans le détail, la possibilité qu'aucune réponse ne soit bonne n'étant jamais à exclure totalement.



• Question 5 : réponse **A**

Imaginons que l'observateur regarde à travers la lunette un arbre situé à grande distance, et vu à l'œil nu sous l'angle α_o . S'il vise précisément le pied de l'arbre, cela signifie deux choses :

- d'une part, les rayons incidents issus du pied de l'arbre forment à l'entrée de la lentille un faisceau cylindrique de rayons parallèles à l'axe optique. Le système étant afocal, les rayons émergents qui leur correspondent forment donc un faisceau cylindrique de rayons également parallèles à l'axe optique.
- d'autre part, les rayons incidents issus du sommet de l'arbre forment à l'entrée de la lentille un faisceau cylindrique de rayons parallèles entre eux et inclinés d'un angle α_o par rapport à l'axe optique. Le système étant afocal, les rayons émergents qui leur correspondent forment donc un faisceau cylindrique de rayons également parallèles entre eux et inclinés d'un angle α_i par rapport à l'axe optique. On a représenté sur la figure ci-dessous le seul faisceau cylindrique issu du sommet de l'arbre.



On comprend dès lors que la détermination du grossissement G de l'instrument nous ramène à la question précédente, les angles α_o et α_i n'étant ni plus ni moins que les angles α_1 et α_2 .

On obtient donc :

$$G = \frac{\alpha_i}{\alpha_o} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{f'_1}{f'_2} = 5$$

→ Réponse **A**

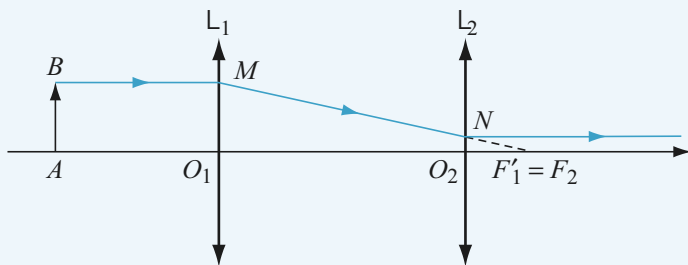


La lunette de Galilée ne remplirait pas sa fonction si l'image de l'arbre apparaissait à l'envers : les réponses B et C, qui proposent un grossissement négatif, sont donc bien évidemment fausses.

• Question 6 : réponse **C**

Nul besoin d'utiliser les relations de conjugaison des deux lentilles pour répondre à cette question. Une simple détermination graphique suffit.

Considérons un objet AB quelconque, et traçons le devenir du seul rayon incident issu de B qui soit parallèle à l'axe optique. La lunette étant toujours afocale, le rayon émergent qui lui correspond est également parallèle à l'axe optique. L'image B'' étant nécessairement située sur le support de ce rayon émergent, on obtient immédiatement par construction la taille de l'image finale $A''B''$.



Appliquons le théorème de Thalès dans le triangle (F'_1O_1M) :

$$\frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_2N}} = \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

Or : $\overline{O_1M} = \overline{AB}$ et $\overline{O_2N} = \overline{A''B''}$ donc $\frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_2N}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = \frac{1}{\gamma}$.

Finalement :

$$\gamma = -\frac{f'_2}{f'_1}$$

→ Réponse **C**

chapitre 2

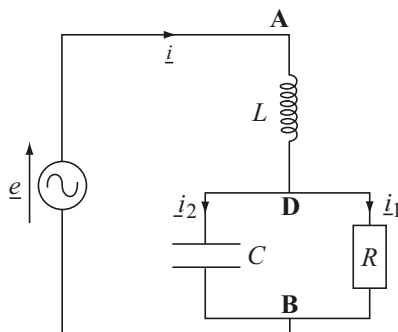
Électricité

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Régime sinusoïdal forcé	52	64
• QCM 2 : Puissance	53	71
• QCM 3 : Filtre passif	55	74
• QCM 4 : Fonction de transfert	57	79
• QCM 5 : Filtre actif	60	86
• QCM 6 : Filtre actif	62	89

→ QCM 1 Régime sinusoïdal forcé

Le dipôle AB représenté sur le schéma de la figure ci-contre est alimenté par une source tension parfaite de force électromotrice instantanée :

$$e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t)$$



• Question 1

Exprimer L en fonction de R , C et ω pour que le dipôle AB soit équivalent à une résistance pure R_{eq} .

A $L = \frac{RC\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}$

B $L = \frac{R^2C}{1 + RC\omega}$

C $L = \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2}$

D $L = \frac{RC\omega}{1 - RC\omega}$

• Question 2

Calculer L sachant que $R = 100 \, \Omega$, $C = 100/3 \, \mu\text{F}$ et $\omega = 400 \, \text{rad.s}^{-1}$.

A $L = 120 \, \text{mH}$

B $L = 200 \, \text{mH}$

C $L = 50 \, \text{mH}$

D $L = 37 \, \text{mH}$

• Question 3

La valeur efficace de la force électromotrice du générateur vaut $E_0 = 180 \, \text{V}$. Calculer la valeur efficace de l'intensité du courant I dans la bobine.

A $I = 1,2 \, \text{A}$

B $I = 3,7 \, \text{A}$

C $I = 4,2 \, \text{A}$

D $I = 5 \, \text{A}$

• Question 4

Calculer les valeurs efficaces U_{AD} et U_{DB} des différences de potentiel u_{AD} et u_{DB} .

A $U_{AD} = 100 \text{ V}$ et $U_{DB} = 250 \text{ V}$ **B** $U_{AD} = 45 \text{ V}$ et $U_{DB} = 135 \text{ V}$

C $U_{AD} = 240 \text{ V}$ et $U_{DB} = 300 \text{ V}$ **D** $U_{AD} = 180 \text{ V}$ et $U_{DB} = 45 \text{ V}$

• Question 5

Calculer les valeurs efficaces I_1 et I_2 des intensités des courants circulant respectivement dans la résistance et dans le condensateur.

A $I_1 = 1 \text{ A}$ et $I_2 = 4 \text{ A}$

B $I_1 = 3 \text{ A}$ et $I_2 = 4 \text{ A}$

C $I_1 = 2 \text{ A}$ et $I_2 = 7 \text{ A}$

D $I_1 = 7 \text{ A}$ et $I_2 = 2 \text{ A}$

• Question 6

Calculer la puissance moyenne P , consommée sur une période par le dipôle AB.

A $P = 1\,200 \text{ W}$

B $P = 120 \text{ W}$

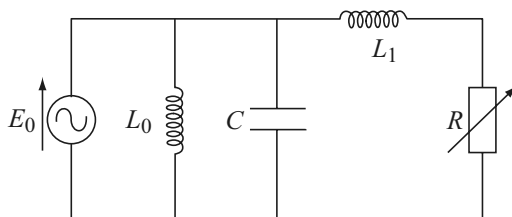
C $P = 75 \text{ W}$

D $P = 900 \text{ W}$

→ QCM 2 Puissance

• Question 1

Le circuit représenté sur le schéma de la figure ci-contre est alimenté par une source de tension de force électromotrice sinusoïdale de pulsation $\omega = 100\pi \text{ rad.s}^{-1}$ et de valeur efficace $E_0 = 220 \text{ V}$. La résistance R est variable et $L_0 = 1 \text{ H}$.



Exprimer la puissance moyenne P , calculée sur une période, qui est absorbée par la résistance R .

A $P = \frac{RE_0^2}{R^2 + L_0^2\omega^2}$

B $P = \frac{RE_0^2}{R^2 + L_1^2\omega^2}$

C $P = \frac{RE_0^2}{L_1^2\omega^2 + L_0^2\omega^2}$

D $P = \frac{RC\omega E_0^2}{\sqrt{R^2 + L_0^2\omega^2}}$

• Question 2

Calculer la valeur R_0 de R pour laquelle la puissance P est maximale.

A $R_0 = (L_1 + L_0)\omega$

B $R_0 = \frac{L_0}{L_1 C \omega}$

C $R_0 = L_1 \omega$

D $R_0 = \frac{L_1}{L_0 C \omega}$

• Question 3

Calculer L_1 lorsque P a sa valeur maximale P_M sachant que $R_0 = 12 \, \Omega$.

A $L_1 = 7,37 \cdot 10^{-2} \, \text{H}$

B $L_1 = 3,82 \cdot 10^{-2} \, \text{H}$

C $L_1 = 1,72 \cdot 10^{-1} \, \text{H}$

D $L_1 = 5,15 \cdot 10^{-1} \, \text{H}$

• Question 4

Calculer dans ces conditions la valeur maximale P_M de P .

A $P_M = 2017 \, \text{W}$

B $P_M = 4810 \, \text{W}$

C $P_M = 7340 \, \text{W}$

D $P_M = 987 \, \text{W}$

• Question 5

Pour une valeur R_1 de R ($R_1 > R_0$), la puissance délivrée par le générateur vaut $P_1 = 1936 \, \text{W}$. Calculer R_1 en adoptant désormais pour L_1 la valeur trouvée précédemment.

A $R_1 = 70 \, \Omega$

B $R_1 = 45 \, \Omega$

C $R_1 = 34 \, \Omega$

D $R_1 = 16 \, \Omega$

• Question 6

Calculer la valeur de C pour que, lorsque $R = R_1$, la tension aux bornes du générateur soit en phase avec le courant qu'il débite.

A $C = 38 \cdot 10^{-6} \, \text{F}$

B $C = 106 \cdot 10^{-6} \, \text{F}$

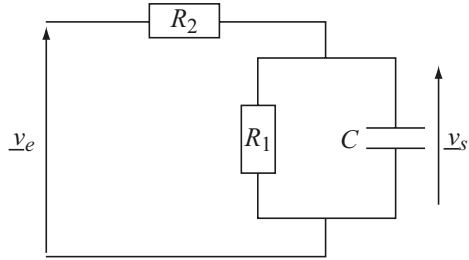
C $C = 340 \cdot 10^{-6} \, \text{F}$

D $C = 507 \cdot 10^{-6} \, \text{F}$

→ QCM 3 Filtre passif

• Question 1

Le schéma de la figure ci-contre représente un pont diviseur de tension obtenu en associant en série un résistor de résistance R_2 et un circuit constitué d'un résistor de résistance R_1 et d'un condensateur de capacité C connectés en parallèle.



Le pont diviseur de tension est

alimenté par une source de tension sinusoïdale de pulsation ω délivrant la tension d'entrée $v_e(t) = V_e \cos(\omega t)$. On désigne par $v_s(t) = V_s \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur instantanée de la tension de sortie prélevée aux bornes du condensateur. $\underline{V_e}$ et $\underline{V_s}$ sont les amplitudes complexes associées respectivement aux tensions d'entrée et de sortie et φ représente le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée.

Montrer que l'on peut mettre la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ sous la forme :

$$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Exprimer T_0 .

A $T_0 = \frac{R_1}{R_2}$

B $T_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

C $T_0 = \frac{R_2}{R_1}$

D $T_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

• Question 2

Donner l'expression de ω_0 .

A $\omega_0 = \frac{1}{R_1 C}$

B $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$

C $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C}$

D $\omega_0 = \frac{1}{(R_1 + R_2) C}$

• Question 3

On donne $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ M}\Omega$ et $C = 11 \text{ pF}$.

Calculer la valeur f_0 de la fréquence correspondant à une atténuation de 3 dB du signal de sortie par rapport à sa valeur maximale.

- A** $f_0 = 15,9 \text{ kHz}$ **B** $f_0 = 75,3 \text{ kHz}$ **C** $f_0 = 1,7 \text{ kHz}$ **D** $f_0 = 8,6 \text{ kHz}$

• Question 4

Montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit la valeur instantanée $v_s(t)$ de la tension de sortie peut se mettre sous la forme :

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = G_0 v_e$$

Exprimer τ .

- A** $\tau = (R_1 + R_2)C$ **B** $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$ **C** $\tau = R_1 C$ **D** $\tau = R_2 C$

• Question 5

Exprimer G_0 .

- A** $G_0 = \frac{R_1}{R_2}$ **B** $G_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ **C** $G_0 = \frac{R_2}{R_1}$ **D** $G_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

• Question 6

Parmi les quatre figures ci-dessous, quelle est celle qui représente la loi d'évolution en fonction du temps de la tension de sortie $v_s(t)$ lorsque la tension d'entrée est un échelon de tension d'amplitude V_0 ?

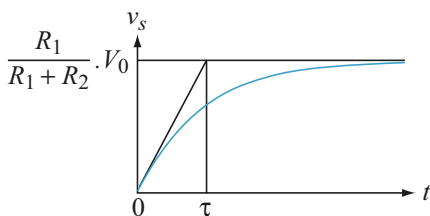


Figure 1

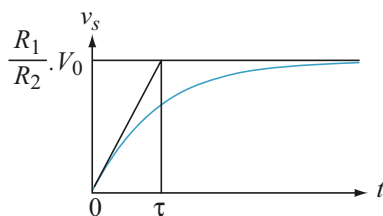


Figure 2

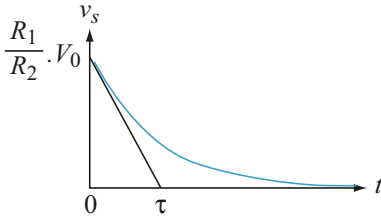


Figure 3

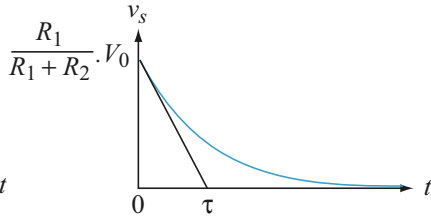


Figure 4

A Figure 1

B Figure 2

C Figure 3

D Figure 4

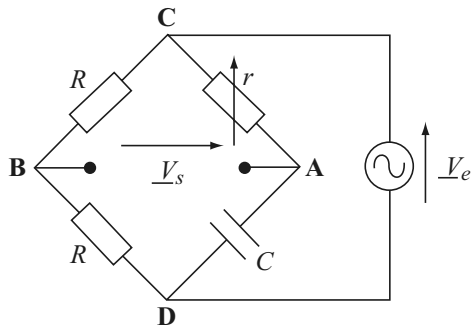
→ QCM 4 Fonction de transfert

• Question 1

On considère le circuit représenté sur le schéma de la figure dessous. Un pont dont les quatre branches sont constitués par trois résistors et un condensateur de capacité C est alimenté par une source de tension sinusoïdale $v_e(t) = v_c - v_D = V_{e0} \cdot \cos(\omega t)$, de pulsation ω , connectée aux bornes de la diagonale CD. On désigne par $v_s(t) = v_A - v_B = V_{s0} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$ la tension de sortie recueillie aux bornes de la diagonale AB.

On définit la fonction de transfert $T_1(j\omega)$ du circuit par le rapport de l'amplitude complexe $\underline{V}_s$ associée à la tension de sortie sur l'amplitude complexe $\underline{V}_e$ associée à la tension d'entrée.

Exprimer $T_1(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$.



A $T_1(j\omega) = 1 - jrC\omega$

B $T_1(j\omega) = \frac{1}{1 + jrC\omega}$

C $T_1(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega} \right)$

D $T_1(j\omega) = \frac{1 + jrC\omega}{1 - jrC\omega}$

• Question 2

Déterminer l'impédance interne Z_{th} de la représentation de Thévenin du générateur équivalent au circuit du point de vue de ses bornes de sortie A et B.

A $Z_{th} = \frac{R}{2(1 + jRC\omega)}$

B $Z_{th} = \frac{r}{2(1 + jrC\omega)}$

C $Z_{th} = \frac{R}{2}$

D $Z_{th} = \frac{R}{2} + \frac{r}{1 + jrC\omega}$

• Question 3

Exprimer le déphasage φ_1 de la tension de sortie $v_s(t)$ par rapport à la tension d'entrée $v_e(t)$.

A $\varphi_1 = -2 \arctan(rC\omega)$

B $\varphi_1 = \arctan(rC\omega)$

C $\varphi_1 = \arctan(2rC\omega)$

D $\varphi_1 = -\arctan\left(\frac{rC\omega}{2}\right)$

• Question 4

On donne $\omega = 1\,000 \text{ rad.s}^{-1}$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.

Quelle valeur r_0 doit-on donner à r pour avoir $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$?

A $r_0 = 5\,000 \text{ }\Omega$

B $r_0 = 1\,000 \text{ }\Omega$

C $r_0 = 3\,000 \text{ }\Omega$

D $r_0 = 2\,000 \text{ }\Omega$

• Question 5

On connecte une charge $R_u = \frac{R}{2} = 500 \text{ }\Omega$ entre les bornes A et B du circuit.

Quelle est la nouvelle valeur φ'_1 du déphasage de la tension de sortie $v_s(t)$ par rapport à la tension d'entrée $v_e(t)$ pour $r = r_0$?

A $\varphi'_1 = -90^\circ$

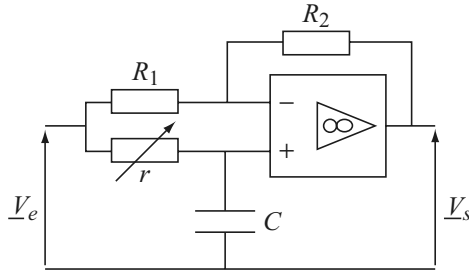
B $\varphi'_1 = -115^\circ$

C $\varphi'_1 = -71,6^\circ$

D $\varphi'_1 = -68,1^\circ$

• Question 6

On envisage maintenant d'utiliser le circuit représenté sur le schéma de la figure ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire. Exprimer la fonction de transfert $\underline{T}_2(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$ du montage.



A $\underline{T}_2(j\omega) = \frac{R_2 - jrR_1C\omega}{R_1 + jrR_2C\omega}$

B $\underline{T}_2(j\omega) = \frac{R_1 - jrR_2C\omega}{R_2 + jrR_2C\omega}$

C $\underline{T}_2(j\omega) = \frac{r - jrR_1R_2C\omega}{R_1 + jrR_2C\omega}$

D $\underline{T}_2(j\omega) = \frac{R_1 - jrR_2C\omega}{R_1 + jrR_1C\omega}$

• Question 7

Quelle doit être la relation entre R_1 et R_2 pour que le module de la fonction de transfert soit égal à l'unité : $|\underline{T}_2(j\omega)| = 1$?

A $R_1 = R_2$

B $R_1 = 2R_2$

C $R_1 = \frac{R_2}{2}$

D $R_1 = 3R_2$

• Question 8

Donner, dans ce cas, l'expression du déphasage $\varphi_2(\omega)$ de la tension de sortie $v_s(t)$ par rapport à la tension d'entrée $v_e(t)$.

A $\varphi_2 = \arctan(rC\omega)$

B $\varphi_2 = -2\arctan(rC\omega)$

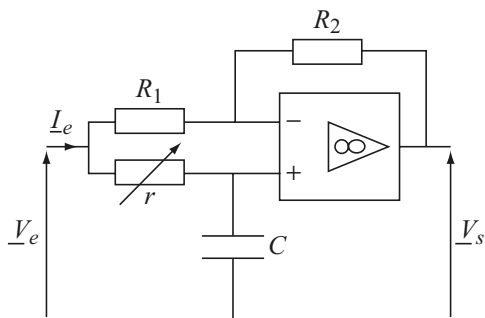
C $\varphi_2 = \arctan(2rC\omega)$

D $\varphi_2 = -\arctan(rC\omega)$

→ QCM 5 Filtre actif

• Question 1

On considère le circuit représenté sur le schéma de la figure ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire. Ce circuit est alimenté à l'entrée par une source délivrant une tension sinusoïdale $v_e(t) = V_e \cdot \sin(\omega t)$ de pulsation ω . On désigne par $\underline{V}_e$ et $\underline{V}_s$ les amplitudes complexes des tensions complexes associées respectivement aux tensions d'entrée $v_e(t)$ et de sortie $v_s(t)$.



Exprimer la fonction de transfert $\underline{T}$ du circuit définie par le rapport :

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$$

A $\underline{T} = \frac{R_1 - jrR_2C\omega}{R_1 + jrR_1C\omega}$

B $\underline{T} = \frac{R_2 - jrR_1C\omega}{R_2 + jrR_1C\omega}$

C $\underline{T} = \frac{r - jR_1R_2C\omega}{r + jR_1R_2C\omega}$

D $\underline{T} = \frac{R_1 + jR_1R_2C\omega}{R_2 - jR_1R_2C\omega}$

• Question 2

On donne $R_1 = 1\,000\ \Omega$. Calculer R_2 pour que le module de la fonction de transfert $|\underline{T}|$ soit indépendant de ω .

A $R_2 = 2\,000\ \Omega$

B $R_2 = 500\ \Omega$

C $R_2 = 750\ \Omega$

D $R_2 = 1\,000\ \Omega$

• Question 3

Que vaut alors $|T|$?

A $|T| = \frac{1}{2}$

B $|T| = 1$

C $|T| = \sqrt{2}$

D $|T| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Question 4

On désigne par φ le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée. Donner, dans ces conditions, l'expression de $\tan \frac{\varphi}{2}$.

A $\tan \frac{\varphi}{2} = 1 - rC\omega$

B $\tan \frac{\varphi}{2} = R_2 C \omega - 1$

C $\tan \frac{\varphi}{2} = -rC\omega$

D $\tan \frac{\varphi}{2} = -R_1 C \omega$

• Question 5

On donne $\omega = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.

Calculer r pour que $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

A $r = 2\,000 \text{ }\Omega$

B $r = 5\,000 \text{ }\Omega$

C $r = 750 \text{ }\Omega$

D $r = 1\,000 \text{ }\Omega$

• Question 6

Calculer, dans ces conditions, l'impédance complexe d'entrée $\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e}$ définie par le rapport des amplitudes complexes de la tension $\underline{V}_e$ sur le courant $\underline{I}_e$ délivrés à l'entrée par le générateur.

A $\underline{Z}_e = 1\,000(1 + j)$

B $\underline{Z}_e = 500j$

C $\underline{Z}_e = 500(1 - j)$

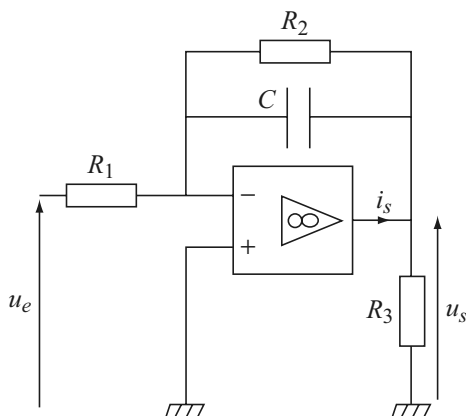
D $\underline{Z}_e = 1\,000 \text{ }\Omega$

→ QCM 6 Filtre actif

• Question 1

Sur le circuit représenté ci-dessous, les résistors ont des résistances de valeurs $R_1 = 4,7 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5,6 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$, et le condensateur, une capacité de valeur $C = 15 \text{ nF}$. L'amplificateur opérationnel est supposé parfait et fonctionne en régime linéaire.

Déterminer le facteur d'amplification en tension $A_0 = \frac{u_s}{u_e}$, en régime continu établi.



A $A_0 = -0,84$

B $A_0 = -1,2$

C $A_0 = 0,84$

D $A_0 = 1,2$

• Question 2

Quelle est la fréquence de coupure f_0 à -3 dB du système ?

A $f_0 = 1 \text{ 895 Hz}$

B $f_0 = 2 \text{ 258 Hz}$

C $f_0 = 11 \text{ 900 Hz}$

D $f_0 = 14 \text{ 200 Hz}$

• Question 3

La tension d'entrée u_e est sinusoïdale d'amplitude 8 V et de fréquence 5,2 kHz. Déterminer l'amplitude $U_{s,m}$ de la tension de sortie.

A $U_{s,m} = 0,78 \text{ V}$

B $U_{s,m} = 1,1 \text{ V}$

C $U_{s,m} = 2,3 \text{ V}$

D $U_{s,m} = 3,3 \text{ V}$

• Question 4

Quel est alors, en degrés, le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée ?

A La sortie est en avance de 70° sur l'entrée.**B** La sortie est en retard de 70° sur l'entrée.**C** La sortie est en avance de 110° sur l'entrée.**D** La sortie est en retard de 110° sur l'entrée.**• Question 5**

Calculer l'amplitude $I_{s,m}$ du courant de sortie i_s de l'amplificateur opérationnel.

A $I_{s,m} = 52 \text{ } \mu\text{A}$

B $I_{s,m} = 1,9 \text{ mA}$

C $I_{s,m} = 2,7 \text{ mA}$

D $I_{s,m} = 3,4 \text{ mA}$

• Question 6

La tension d'entrée est maintenant une tension crête-à-crête de fréquence 50 kHz. Quelle est la forme de la tension de sortie u_s ?

A La tension de sortie est de forme sinusoïdale.**B** La tension de sortie est de forme triangulaire.**C** La tension de sortie est une succession d'arcs de parabole.**D** La tension de sortie est une succession d'impulsions.

→ QCM 1 Régime sinusoïdal forcé

• Question 1 : réponse C

Calculons l'impédance complexe équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$ du dipôle AB.

- En parallèle, les admittances complexes s'ajoutent :

$$\underline{Y}_{\text{RC}} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R} \quad \text{donc :} \quad \underline{Z}_{\text{RC}} = \frac{1}{\underline{Y}_{\text{RC}}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$

- En série, les impédances complexes s'ajoutent :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{\text{RC}} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Impédance, résistance, réactance

$\underline{Z}_{\text{eq}}$ peut se mettre sous la forme $\underline{Z}_{\text{eq}} = R_{\text{eq}} + jX_{\text{eq}}$ où :

- R_{eq} , qui est la partie réelle de $\underline{Z}_{\text{eq}}$, représente la **résistance** du dipôle AB, exprimée en Ohm (Ω);
- X_{eq} , qui est la partie imaginaire de $\underline{Z}_{\text{eq}}$, représente la **réactance** du dipôle AB, exprimée également en Ohm (Ω). On rappelle que la partie imaginaire d'un complexe est un **réel**.



Attention : $R_{\text{eq}} \neq R$!

Identifions R_{eq} et X_{eq} :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = jL\omega + \frac{R(1 - jRC\omega)}{(1 + jRC\omega)(1 - jRC\omega)} = jL\omega + \frac{R - jR^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

soit :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} + j \left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} \right) = \underbrace{\frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2}}_{R_{\text{eq}}} + j \underbrace{\left(\frac{L\omega + R^2C\omega(LC\omega^2 - 1)}{1 + R^2C^2\omega^2} \right)}_{X_{\text{eq}}}$$

Le dipôle AB est équivalent à une résistance pure si et seulement si :

$$X_{\text{eq}} = 0$$

soit : $L(\omega + R^2 C^2 \omega^3) = R^2 C \omega$

et finalement :

$$L = \frac{R^2 C}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

→ Réponse **C**



Revenons sur l'efficacité de l'analyse dimensionnelle.

- Pratiquée à chaque ligne de calcul, elle permet de détecter les erreurs d'homogénéité dès leur apparition.
- Dans ce type d'épreuve, elle permet en outre d'éliminer immédiatement les solutions qui n'ont pas la dimension attendue.

Régime sinusoïdal forcé et analyse dimensionnelle

En régime sinusoïdal forcé, il est déconseillé de manipuler inductances et capacités séparément. On préférera isoler des termes homogènes :

- R , $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$ sont des **impédances**, toutes trois exprimées en **Ohm** (Ω).
- Les blocs $RC\omega$, $R^2 C^2 \omega^2$, $\frac{R}{L\omega}$ et $LC\omega^2$ sont **sans dimension**.

Les expressions des réponses B et C sont bien homogènes à des inductances.



En revanche, les expressions des réponses A et D sont sans dimension, et doivent donc être rejetées.

• Question 2 : réponse **A**

Simple application numérique de la question précédente :

$$L = \frac{R^2 C}{1 + R^2 C^2 \omega^2} = \frac{100^2 \times \left(\frac{100}{3} \cdot 10^{-6}\right)}{1 + 100^2 \times \left(\frac{100}{3} \cdot 10^{-6}\right)^2 \times 400^2} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{3}{25}$$

$$= 0,12 \text{ H} = 120 \text{ mH}$$

→ Réponse **A**

On rappelle qu'il n'y a vérification que s'il y a concordance entre au minimum deux cheminements distincts. On invite donc le candidat à poursuivre le calcul de simplification le plus loin possible, et à retarder le recours à la calculatrice. La concordance des résultats donnés à la calculatrice par les

fractions $\frac{100^2 \times \left(\frac{100}{3} \cdot 10^{-6}\right)}{1 + 100^2 \times \left(\frac{100}{3} \cdot 10^{-6}\right)^2 \times 400^2}$ d'une part, et $\frac{3}{25}$ d'autre part, peut

être considérée comme de bon augure.

• Question 3 : réponse D

Nous avons vu à la question 1 que le dipôle AB était équivalent à une résistance pure R_{eq} de valeur :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

Il convient donc de simplifier le schéma du montage :

Définissons les grandeurs complexes instantanées associées à la force électromotrice $e(t)$ d'une part, et à l'intensité $i(t)$ du courant d'autre part :

- $\underline{e}(t) = E_0 \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$

car $e(t) = E_0 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) = E_0 \sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

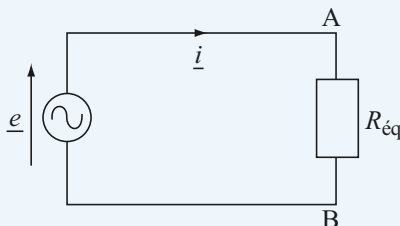
- $\underline{i}(t) = I \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$ en phase avec $\underline{e}(t)$ car le dipôle AB est purement résistif.

La loi d'Ohm aux bornes de R_{eq} s'écrit en notation complexe :

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R_{\text{eq}}} \quad \text{soit} \quad I \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{E_0 \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}}{R_{\text{eq}}} \quad \text{et finalement :}$$

$$I = \frac{E_0}{R_{\text{eq}}} = \frac{E_0 (1 + R^2 C^2 \omega^2)}{R} = \frac{180 \times \left[1 + 100^2 \times \left(\frac{100}{3} \cdot 10^{-6}\right)^2 \times 400^2\right]}{100}$$

$$I = \frac{18}{10} \times \frac{25}{9} = 5 \text{ A}$$



→ Réponse D



Il serait totalement inapproprié de se lancer ici dans la résolution du circuit de l'énoncé, ou encore d'écrire les lois d'additivité des tensions et des intensités. Le candidat doit partir du principe que chaque question appelle à une résolution simple et rapide.

• Question 4 : réponse **C**

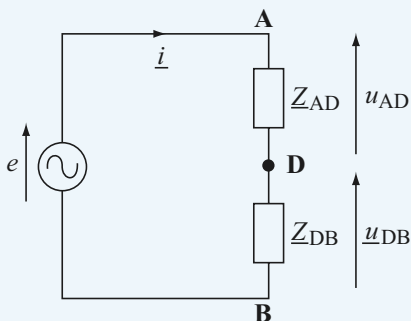
Considérons le schéma simplifié ci-dessous.

Les grandeurs complexes instantanées associées à la force électromotrice $e(t)$ d'une part, et aux tensions $u_{AD}(t)$ et $u_{DB}(t)$ d'autre part, s'écrivent :

- $\underline{e}(t) = E_0 \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$ d'une part,

- $\underline{u}_{AD}(t) = U_{AD} \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi_{AD}\right)}$

et $\underline{u}_{AD}(t) = U_{AD} \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi_{AD}\right)}$ d'autre part.



Appliquons deux fois la relation du pont diviseur de tension en notation complexe, en réutilisant l'expression de L établie à la question 2 :

- $\underline{u}_{AD}(t) = \frac{Z_{AD}}{Z_{\text{eq}}} \underline{e}(t) = \frac{jL\omega}{R_{\text{eq}}} \underline{e}(t) = jL\omega \frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{R} \underline{e}(t) = jRC\omega \underline{e}(t)$

$$\text{d'où : } U_{AD} \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi_{AD}\right)} = jRC\omega E_0 \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

et, par égalité des modules :

$$U_{AD} = RC\omega E_0 = 100 \times \left(\frac{100}{3} \cdot 10^{-4} \right) \times 400 \times 180 = 240 \text{ V}$$

$$\bullet \underline{u}_{DB}(t) = \frac{\underline{Z}_{DB}}{\underline{Z}_{\text{eq}}} e(t) = \frac{\underline{Z}_{DB}}{R_{\text{eq}}} e(t) = \frac{R}{1 + jRC\omega} \frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{R} e(t) = (1 - jRC\omega) e(t)$$

$$\text{d'où : } U_{DB} \sqrt{2} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi_{DB}\right)} = (1 - jRC\omega) E_0 \sqrt{2} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

et, par égalité des modules :

$$U_{DB} = \sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2} E_0 = \sqrt{1 + 100^2 \times \left(\frac{100}{3} \cdot 10^{-6}\right)^2} \times 400^2 \times 180 = 300 \text{ V}$$

→ Réponse **C**



On rappelle que la loi d'additivité des tensions n'est valable qu'en grandeur instantanée. En notation complexe, elle s'écrit :

$$\underline{e}(t) = \underline{u}_{AD}(t) + \underline{u}_{DB}(t)$$

Cette égalité implique, concernant les valeurs efficaces, l'inégalité large :

$$E_0 \leq U_{AD} + U_{DB}$$

Le **signe égal** correspond au cas où les tensions $u_{AD}(t)$ et $u_{DB}(t)$ sont **en phase** avec la force électromotrice $e(t)$. Ce cas n'est pas réalisé ici, **bien que le dipôle AB soit équivalent à une résistance pure**. La réponse B est donc fausse.

• Question 5 : réponse **B**

Loi d'Ohm généralisée en notation complexe

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}}$$

Par égalité des modules, on obtient la relation entre valeurs efficaces :

$$I = \frac{U}{|Z|}$$

Appliquons cette relation successivement aux dipôles résistor et condensateur :

$$\bullet I_1 = \frac{U_{DB}}{R} = \frac{300}{100} = 3 \text{ A}$$

$$\bullet I_2 = \frac{U_{DB}}{|Z_C|} = \frac{U_{DB}}{\frac{1}{C\omega}} = C\omega U_{DB} = \left(\frac{100}{3} \cdot 10^{-6}\right) \times 400 \times 300 = 4 \text{ A}$$

→ Réponse **B**

NON

Tout comme dans la question précédente, la loi d'additivité des intensités n'est valable qu'en grandeur instantanée. En notation complexe, elle s'écrit :

$$\underline{i}(t) = \underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t)$$

Cette égalité implique ici, concernant les valeurs efficaces, l'inégalité stricte :

$$I < I_1 + I_2$$

Le **signe égal** correspondrait au cas où les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ seraient **en phase** avec l'intensité $i(t)$ du courant circulant dans la branche principale. Ce cas n'est pas réalisé ici, compte tenu de la nature des dipôles (résistor et condensateur). La réponse A est donc fausse.

• Question 6 : réponse **D**

Puissance moyenne consommée par les dipôles R , L ou C en régime sinusoïdal forcé

$$P = UI \cos \varphi$$

où U , I et φ désignent respectivement la tension efficace aux bornes du dipôle, l'intensité efficace du courant qui le traverse, et le déphasage de la tension par rapport à l'intensité. On peut regrouper les résultats dans un tableau :

	Résistor	Bobine idéale	Condensateur
Déphasage φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
Puissance moyenne P	$UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$	0	0

Le seul composant du dipôle AB à consommer de la puissance est donc le résistor :

$$P_{\text{résis}} = U_{\text{DB}} \cdot I_1 = 300 \times 3 = 900 \text{ W}$$



Pour calculer P , on a recours au **théorème de Boucherot**, également appelé **théorème des puissances**. On conseille au candidat d'en mémoriser le résultat. Ce théorème s'avère en effet très pratique et, bien qu'il ait été retiré des programmes, rien ne s'oppose à ce qu'il soit utilisé dans cette épreuve où aucune justification n'est demandée, voire même dans une épreuve rédigée en guise de vérification au brouillon.

Théorème de Boucherot

En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne totale consommée par un réseau passif est égale à la somme des puissances moyennes consommées par chacun des dipôles constitutifs du réseau, et ceci quelque soit l'architecture du réseau.

Autrement dit, peu importe que les dipôles soient associés en série ou en parallèle.

$$P = P_{\text{résis}} + P_{\text{bob}} + P_{\text{cond}} = P_{\text{résis}} = 900 \text{ W}$$

→ Réponse **D**

Le dipôle AB étant purement résistif, on pouvait aussi calculer directement la puissance moyenne consommée :

$$P = E_0 I = 180 \times 5 = 900 \text{ W}$$

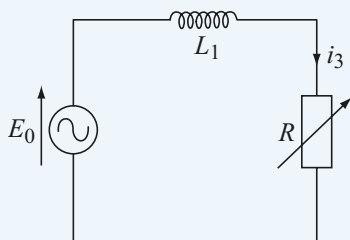
Proposons enfin une dernière façon d'obtenir le résultat :

$$R_{\text{éq}} = \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} = \frac{100}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{100}{\frac{25}{9}} = 36 \, \Omega \quad \text{et} \quad P = R_{\text{éq}} I^2 = 36 \times 5^2 = 900 \text{ W}.$$

→ QCM 2 Puissance

• Question 1 : réponse B

Le circuit proposé comporte trois branches réceptrices disposées en parallèle. La source de tension étant **idéale**, c'est-à-dire d'impédance interne **nulle**, le courant circulant dans la branche (L_1, R) est **totalement indépendant** des courants circulant dans les deux autres branches. On considère dès lors le montage ci-dessus, où les deux premières branches ont tout simplement été supprimées.



Notons :

- $e(t) = E_0 \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t)$ la valeur instantanée de la force électromotrice
- $i_3(t) = I_3 \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi_3)$ la valeur instantanée de l'intensité du courant circulant dans la branche 3.

Les grandeurs complexes associées s'écrivent respectivement :

$$\underline{e}(t) = E_0 \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}_3(t) = I_3 \sqrt{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_3)}$$

La loi d'Ohm aux bornes de (L_1, R) s'écrit en notation complexe $\underline{i}_3(t) = \frac{\underline{e}(t)}{\underline{Z}_3}$, soit :

$$I_3 \sqrt{2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_3)} = \frac{E_0 \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}}{R + jL_1 \omega} \quad \text{et, par égalité des modules :} \quad I_3 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L_1^2 \omega^2}}.$$

Finalement, la puissance consommée dans la résistance R vaut :

$$P = RI_3^2 = \frac{RE_0^2}{R^2 + L_1^2 \omega^2}$$

→ Réponse B

Une petite précision concernant l'utilisation de la relation $P = UI \cdot \cos \varphi$, déconseillée ici :

- si on veut l'appliquer au résistor : $\varphi = 0$ mais $U \neq E_0$ à cause de la bobine
- si on veut l'appliquer à la branche 3 : $U = E_0$ mais $\varphi \neq 0$ à cause de la bobine.



• Question 2 : réponse C

Là où la fonction $P(R) = \frac{RE_0^2}{R^2 + L_1^2\omega^2}$ est maximale, sa dérivée $\frac{dP}{dR}$ s'annule.

$$\frac{dP}{dR} = \frac{E_0^2 (R^2 + L_1^2\omega^2 - 2R^2)}{(R^2 + L_1^2\omega^2)^2} = \frac{E_0^2 (L_1^2\omega^2 - R^2)}{(R^2 + L_1^2\omega^2)^2}.$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \text{si et seulement si :} \quad R = R_0 = L_1\omega.$$

$P(R_0) = \frac{E_0^2}{2L_1\omega}$ et $P(0) = 0$ d'où $P(R_0) > P(0)$: la valeur $R = R_0$ correspond bien à un **maximum** de la fonction $P(R)$.

→ Réponse C



Comme indiqué à la question précédente, le comportement de la branche 3 est totalement indépendant de celui des deux premières branches. Toute expression faisant intervenir L_0 ou C est donc fausse, et les réponses A, B et D doivent être éliminées.

• Question 3 : réponse B

Compte tenu de la question précédente, on a :

$$R = R_0 = L_1\omega \quad \text{soit} \quad L_1 = \frac{R_0}{\omega} = \frac{12}{100\pi} = 3,82 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

→ Réponse B

• Question 4 : réponse A

Comme il a été établi à la question 2 :

$$P_M = \frac{E_0^2}{2L_1\omega} = \frac{E_0^2}{2R_0} = \frac{220^2}{2 \times 12} = 2017 \text{ W} \quad \rightarrow \text{Réponse A}$$



On indique à la question suivante que pour $R = R_1$ ($R_1 > R_0$) : $P = P_1 = 1936 \text{ W}$. Or, $P_M > P_1$, donc la réponse D doit être éliminée.

• **Question 5 : réponse D**

D'après la question 1 : $P_1 = \frac{R_1 E_0^2}{R_1^2 + L_1^2 \omega^2}$ d'où l'équation du 2nd degré en R_1 :

$$R_1^2 - \frac{E_0^2}{P_1} R_1 + L_1^2 \omega^2 = 0$$

de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{E_0^4}{P_1^2} - 4L_1^2 \omega^2 = \frac{220^4}{1936^2} - 4 \times (3,82 \cdot 10^{-2})^2 \times (100\pi)^2 = 49$$

$\Delta > 0$, donc cette équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$\bullet R_{1,1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{E_0^2}{P_1} - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\frac{220^2}{1936} - \sqrt{49}}{2} = \frac{25 - 7}{2} = 9 \, \Omega$$

$$\bullet R_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{E_0^2}{P_1} + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\frac{220^2}{1936} + \sqrt{49}}{2} = \frac{25 + 7}{2} = 16 \, \Omega$$

$$R_1 > R_0 \quad \text{donc} \quad R_1 = 16 \, \Omega$$

→ **Réponse D**

• **Question 6 : réponse B**

La tension aux bornes du générateur est en phase avec le courant qu'il débite si le dipôle équivalent aux trois branches passives est une résistance pure, donc si son impédance complexe $\underline{Z}_{\text{éq}}$ et son admittance complexe $\underline{Y}_{\text{éq}}$ sont réelles.

Compte tenu de la disposition en parallèle des trois branches, nous utiliserons l'admittance afin de simplifier les calculs.

En parallèle, les admittances s'ajoutent :

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = \frac{1}{jL_0\omega} + jC\omega + \frac{1}{R_1 + jL_1\omega}$$

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = j \left(C\omega - \frac{1}{L_0\omega} \right) + \frac{R_1 - jL_1\omega}{R_1^2 + L_1^2\omega^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + L_1^2\omega^2} + j \left(C\omega - \frac{1}{L_0\omega} - \frac{L_1\omega}{R_1^2 + L_1^2\omega^2} \right).$$

$\underline{Y}_{\text{eq}}$ est réelle si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, d'où :

$$C = \frac{1}{L_0 \omega^2} + \frac{L_1}{R_1^2 + L_1^2 \omega^2} = \frac{1}{1 \times (100\pi)^2} + \frac{3,82 \cdot 10^{-2}}{16^2 + (3,82 \cdot 10^{-2})^2 \times (100\pi)^2}$$

Finalement : $C = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 106 \cdot 10^{-6} \text{ F}$



→ Réponse **B**

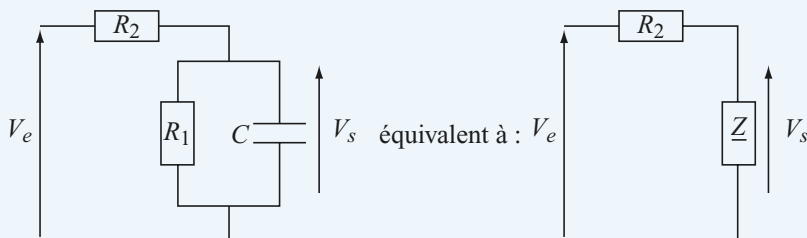
Au terme de ce QCM 2, il est intéressant de remarquer que les réponses aux cinq premières questions auraient été les mêmes si le montage avait été privé de deux de ses branches, comme représenté à la question 1. Cela illustre combien les calculs sont souvent bien moins monstrueux qu'il n'y paraît de prime abord, et combien il est nécessaire de prendre le temps de réfléchir avant de se lancer tête baissée.

→ QCM 3 Filtre passif

• Question 1 : réponse **D**

Notons $\underline{Z}$ l'impédance complexe du dipôle équivalent à l'association en parallèle du résistor de résistance R_1 et du condensateur de capacité C .

Le montage se simplifie, comme l'indique le schéma ci-dessous



Calculons $\underline{Z}$: $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_1} + jC\omega = \frac{1 + jR_1C\omega}{R_1}$, d'où $\underline{Z} = \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega}$.

La fonction de transfert $\underline{T}(j\omega)$ s'obtient par simple application d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\underline{Z}}{R_2 + \underline{Z}} = \frac{\frac{R_1}{1 + jR_1C\omega}}{R_2 + \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + jR_1R_2C\omega} = \frac{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}{1 + j\frac{R_1R_2C\omega}{R_1 + R_2}}$$

En identifiant avec la forme proposée pour $\underline{T}(j\omega)$: $\underline{T} = \frac{T_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$
on aboutit à :

$$T_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}$$

→ Réponse **D**

• Question 2 : réponse **B**

La réponse est donnée par l'équation 1 de la question précédente.

→ Réponse **B**

• Question 3 : réponse **A**

f_0 est en réalité la fréquence de coupure f_c du filtre.

Fréquence de coupure f_c d'un filtre

- 1) $G(f_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$, où $G = |\underline{T}|$ désigne le **gain du filtre**.
- 2) $G_{\text{dB}}(f_c) = G_{\text{dB max}} - 3$, où $G_{\text{dB}} = 20 \log G$ désigne le gain exprimé en **décibel**.

Le gain du pont diviseur de tension vaut ici :

$$G(\omega) = |\underline{T}(j\omega)| = \left| \frac{T_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \right| = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

- $G(\omega)$ est maximal lorsque $\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ est minimal, soit lorsque $\omega = 0$. Le filtre est un **passe-bas** et : $G_{\max} = G(0) = T_0$.
- La pulsation de coupure $\omega_c = 2\pi f_c$ est définie par : $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ Soit :

$$\frac{T_0}{\sqrt{2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{de solution : } \omega_c = \omega_0.$$

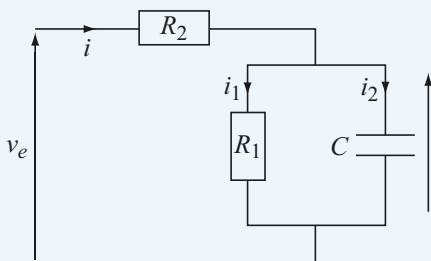
Finalement :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C} = \frac{1.10^6 + 10.10^6}{2 \times 3,14 \times 1.10^6 \times 10.10^6 \times 11.10^{-12}} = 15\,900 \text{ Hz}$$

$$f_0 = 15,9 \text{ kHz}$$

→ Réponse **A**

• Question 4 : réponse **B**



Dans le montage initial, les courants dans les trois branches étant définis comme sur la figure ci-contre, l'écriture de la maille permet d'aboutir rapidement à la solution :

$$v_s + R_2 i = v_e \quad (1)$$

La loi d'additivité des intensités

donne par ailleurs :

$$i = i_1 + i_2 = \frac{v_s}{R_1} + C \frac{dv_s}{dt} \quad (2)$$

En reportant (2) dans (1), on obtient :

$$v_s + \frac{R_2}{R_1} v_s + R_2 C \frac{dv_s}{dt} = v_e, \quad \text{soit} \quad \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \frac{dv_s}{dt} + v_s = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_e.$$

L'identification avec l'équation différentielle proposée donne :

$$\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad G_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$

Il existe une autre façon d'obtenir très rapidement cette équation différentielle. Le raisonnement est le suivant.

En régime sinusoïdal forcé et en notation complexe, si une tension s'écrit $\underline{v}(t) = V.e^{j(\omega t + \varphi)}$, alors : $\frac{dv}{dt} = j\omega \underline{v}$, $\frac{d^2 v}{dt^2} = (j\omega)^2 \underline{v}$, etc...

Il est donc possible d'établir une transposition astucieuse permettant de passer de la **fonction de transfert** à l'**équation différentielle**, et réciproquement :

Fonction de transfert	Équation différentielle
$j\omega \underline{V}$	$\frac{dv}{dt}$
$(j\omega)^2 \underline{V} = -\omega^2 \underline{V}$	$\frac{d^2 v}{dt^2}$

La fonction de transfert donnée par l'énoncé est :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}};$$

équivalente à $\frac{1}{\omega_0} j\omega \underline{V}_s + \underline{V}_s = T_0 \underline{V}_e$ et transposable en : $\frac{1}{\omega_0} \frac{dv_s}{dt} + v_s = T_0 v_e$

Par identification avec l'équation différentielle proposée, on retrouve :

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad G_0 = T_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

• Question 5 : réponse **D**

La réponse est contenue dans la question précédente. → Réponse **D**

• Question 6 : réponse **A**

La tension d'entrée $v_e(t)$ est définie par :

$$\begin{cases} t < 0 : v_e(t) = 0 \\ t > 0 : v_e(t) = V_0 \end{cases}$$

On supposera que le condensateur est initialement déchargé : $v_s(t) = 0$ pour $t < 0$.

La tension aux bornes du condensateur étant une fonction continue du temps :

$$v_s(0^+) = v_s(0^-) = 0 \quad (\text{condition initiale}).$$

L'équation différentielle $\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = G_0 V_0$ est du 1^{er} ordre avec 2nd membre constant. Elle admet pour solution :

$$v_s(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + G_0 V_0 \quad \text{et, compte tenu de la condition initiale : } K = -G_0 V_0.$$

$$\text{Finalement : } v_s(t) = G_0 V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Le graphe qui représente la tension de sortie $v_s(t)$ est celui de la **figure 1**.

→ Réponse **A**



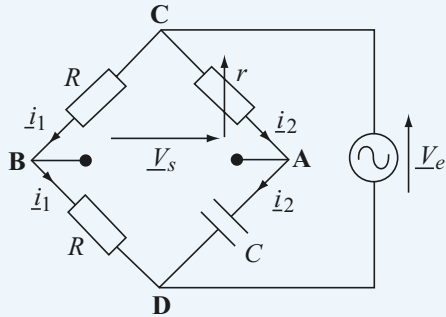
Pour conclure, signalons que la difficulté majeure de ce QCM est qu'il commence en régime sinusoïdal forcé pour se terminer en régime transitoire. Attention donc à rester vigilant, et notamment à ne pas confondre le graphe $v_s(t)$ de la question 6 avec le graphe $G(\omega)$ du filtre passe-bas.

→ QCM 4 Fonction de transfert

• Question 1 : réponse **C**

La sortie du pont étant **ouverte** :

- les deux résistors de résistance R sont disposés **en série**, c'est-à-dire qu'ils sont parcourus par des courants **de même intensité** i_1 ;
- le résistor de résistance r et le condensateur sont disposés en série, et sont parcourus par des courants de même intensité i_2 .



Par conséquent, il est possible d'appliquer à l'une et l'autre branches la relation du **pont diviseur de tension** en grandeur instantanée complexe :

- dans la branche (R, R) : $\underline{v}_C(t) - \underline{v}_B(t) = \frac{R}{R+R} \underline{v}_e(t) = \frac{1}{2} \underline{v}_e(t)$
- dans la branche (r, C) : $\underline{v}_C(t) - \underline{v}_A(t) = \frac{r}{r + \frac{1}{jC\omega}} \underline{v}_e(t) = \frac{j r C \omega}{1 + j r C \omega} \underline{v}_e(t)$

Par additivité des tensions :

$$\underline{v}_s = \underline{v}_A - \underline{v}_B = \underline{v}_C - \underline{v}_B - (\underline{v}_C - \underline{v}_A) = \frac{1}{2} \underline{v}_e - \frac{j r C \omega}{1 + j r C \omega} \underline{v}_e = \frac{1 - j r C \omega}{2(1 + j r C \omega)} \underline{v}_e$$

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$\underline{T}_1(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1 - j r C \omega}{2(1 + j r C \omega)}$$

→ Réponse **C**

À titre de vérification, on peut étudier le comportement du condensateur et du pont pour $\omega = 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.

- Lorsque $\omega = 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur **ouvert** :

$$i_2 = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{v}_s = \underline{v}_A - \underline{v}_B = \underline{v}_C - \underline{v}_B = \frac{1}{2} \underline{v}_e \quad \text{et} \quad \underline{T}_1(0) = \frac{1}{2}$$

- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé :

$$v_s = v_A - v_B = v_D - v_B = -\frac{1}{2}v_e \quad \text{et} \quad T_1(\infty) = -\frac{1}{2}.$$

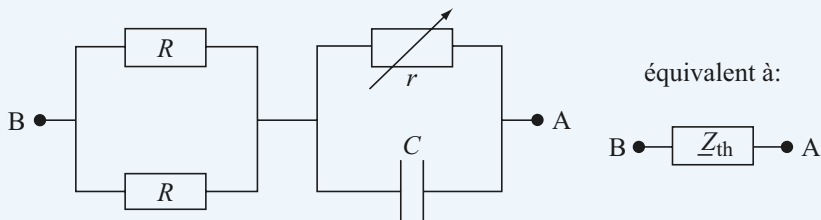


Le pont est donc un filtre **pas**se-bande. Les filtres des réponses C et D sont des passe-bande, mais seules les valeurs de la réponse C conviennent. Le filtre de la réponse B est un passe-bas, tandis que la réponse A est absurde puisqu'elle donne un gain infini lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

• Question 2 : réponse D

Pour déterminer l'impédance interne Z_{th} du générateur de Thévenin équivalent au circuit vu des bornes A et B, il faut **éteindre le générateur idéal de tension**, c'est-à-dire le remplacer par **un fil**.

Il est alors judicieux de redessiner le circuit, pour reconnaître l'association en série de deux associations parallèles :



$$Z_{th} = \frac{R^2}{2R} + \frac{\frac{r}{jC\omega}}{r + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{2} + \frac{r}{1 + jrC\omega} \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$

• Question 3 : réponse A

Le déphasage ϕ_1 de la tension de sortie $v_s(t)$ par rapport à la tension d'entrée $v_e(t)$ est l'**argument** de la fonction de transfert $T_1(j\omega)$:

$$\phi_1 = \arg(T_1) = \arg\left[\frac{1 - jrC\omega}{2(1 + jrC\omega)}\right] = \arg(1 - jrC\omega) - \arg(2) - \arg(1 + jrC\omega)$$

$$\phi_1 = \arctan(-rC\omega) - \arctan(0) - \arctan(rC\omega) = -2\arctan(rC\omega)$$

$\rightarrow$ Réponse A

• **Question 4 : réponse B**

D'après la question précédente :

$$r = \frac{1}{C\omega} \tan\left(-\frac{\varphi_1}{2}\right)$$

Donc : $r_0 = \frac{1}{1.10^{-6} \times 1000} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\,000\ \Omega \quad \rightarrow \text{Réponse B}$

• **Question 5 : réponse C**

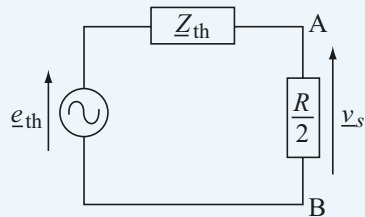
Le pont fonctionne maintenant **en sortie fermée**, donc sa fonction de transfert est modifiée.

Utilisons le générateur de Thévenin équivalent au circuit vu des bornes A et B.

- Son impédance interne a été calculée à la question 2 : $Z_{th} = \frac{R}{2} + \frac{r}{1 + jrC\omega}$.
- Sa force électromotrice instantanée complexe est égale à la tension en sortie ouverte, calculée à la question 1 :

$$\underline{e}_{th} = (\underline{v}_s)_{\text{sortie ouverte}} = \frac{1 - jrC\omega}{2(1 + jrC\omega)} \underline{v}_e$$

Appliquons un pont diviseur de tension au montage simplifié ci-contre :



$$\begin{aligned} \underline{v}_s &= \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + Z_{th}} \underline{e}_{th} \\ &= \frac{\frac{R}{2}}{R + \frac{r}{1 + jrC\omega}} \frac{1 - jrC\omega}{2(1 + jrC\omega)} \underline{v}_e \end{aligned}$$

D'où : $\underline{T}_1(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{R(1 - jrC\omega)}{4(r + R + jrRC\omega)}$

et :

$$\varphi'_1 = \arg(\underline{T}_1) = -\arctan(r_0 C\omega) - \arctan\left(\frac{r_0 RC\omega}{r_0 + R}\right) = -\frac{\pi}{4} - \arctan(2) = -71,6^\circ$$

→ Réponse C



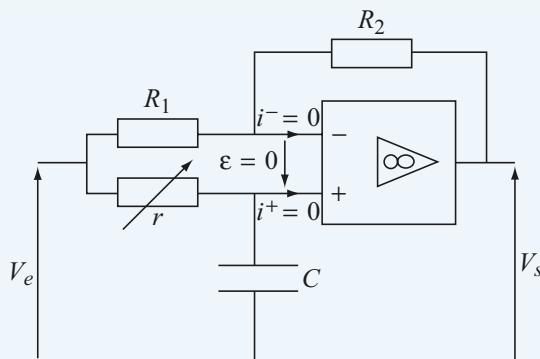
• Question 6 : réponse **D**

Il est totalement déconseillé de chercher à résoudre ce genre de circuit en recourant à « l'artillerie lourde » des équations des mailles, des équations des nœuds et de la loi d'Ohm généralisée en régime sinusoïdal forcé avec la notation complexe : une telle démarche conduirait à devoir résoudre un système linéaire d'équations très lourd à manipuler. Des résultats tout prêts à l'emploi sont disponibles dans le cours, et leur utilisation est beaucoup plus simple et moins risquée : pont diviseur de tension ou théorème de Millman par exemple. Encore faut-il s'assurer que l'on est bien dans les conditions de leur application !...

La première étape dans la résolution d'un exercice comportant un amplificateur opérationnel (A.O.) idéal fonctionnant en régime linéaire est de transcrire, mathématiquement et sur le schéma, la signification des qualificatifs « idéal » et « linéaire ».

Modélisation d'un A.O. idéal fonctionnant en régime linéaire

- Les courants d'entrée sont nuls : $i^- = i^+ = 0$.
- La tension différentielle d'entrée est nulle : $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$.



Puisque $i^- = i^+ = 0$:

- les résistors de résistances R_1 et R_2 sont parcourus par des courants de même intensité, et sont donc disposés en série ;
- le résistor de résistance r et le condensateur sont également disposés en série.



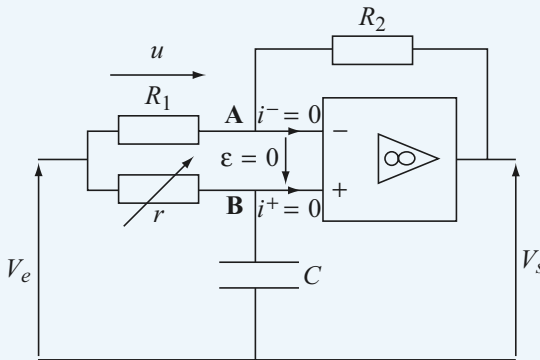
Notons au passage que si l'A.O. n'était pas idéal, les courants d'entrée i^- et i^+ ne seraient pas nuls, et les dipôles correspondants ne seraient plus associés en série.

La nature (série ou parallèle) d'une association ne se reconnaît donc pas à sa disposition géométrique, mais à l'état électrique qui la caractérise.

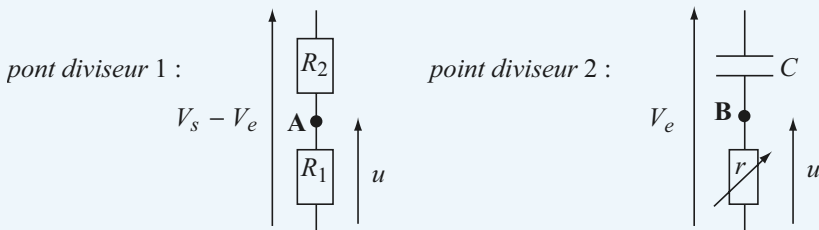
Dipôles en série – en parallèle

- Dipôles en série = dipôles traversés par un **même courant**.
- Dipôles en parallèle = dipôles ayant **même tension** à leurs bornes.

Dans le cas présent, il est donc possible de faire apparaître deux ponts diviseurs de tension dans lesquels $u(t)$ représente la tension commune aux bornes de R_1 et de r :



donne par extraction



Appliquons la relation du pont diviseur de tension en notation complexe.

• Pont diviseur 1 :
$$\underline{u} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (\underline{V}_s - \underline{V}_e) \quad (1)$$

• Pont diviseur 2 :
$$\underline{u} = -\frac{r}{r + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V}_e = -\frac{j r C \omega}{1 + j r C \omega} \underline{V}_e \quad (2)$$

Par substitution de $\underline{u}$ entre (1) et (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_1 + R_2} (\underline{V}_s - \underline{V}_e) &= -\frac{j r C \omega}{1 + j r C \omega} \underline{V}_e \\ \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{V}_s &= \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{j r C \omega}{1 + j r C \omega} \right) \underline{V}_e \\ \underline{V}_s &= \left(1 - \frac{j r C \omega (R_1 + R_2)}{R_1 + j r R_1 C \omega} \right) \underline{V}_e = \left(\frac{R_1 - j r R_2 C \omega}{R_1 + j r R_1 C \omega} \right) \underline{V}_e \end{aligned}$$

Et finalement :
$$\underline{T}_2(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{R_1 - j r R_2 C \omega}{R_1 + j r R_1 C \omega} \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$

Comme annoncé plus haut, une autre méthode consiste à appliquer deux fois de suite le théorème de Millman.

• Au nœud A :
$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{V}_e}{R_1} + \frac{\underline{V}_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 \underline{V}_e + R_1 \underline{V}_s}{R_1 + R_2} \quad (3)$$

• Au nœud B :
$$\underline{V}_B = \frac{\frac{\underline{V}_e}{r}}{\frac{1}{r} + jC\omega} = \frac{\underline{V}_e}{1 + j r C \omega} \quad (4)$$

Puisque $\varepsilon = 0$: $\underline{V}_A = \underline{V}_B$ et, par substitution entre (3) et (4), on retrouve le résultat précédent.



Notons qu'aucune des quatre expressions proposées ne peut être éliminée pour cause d'inhomogénéité, toutes étant sans dimension, à l'instar de la fonction de transfert.

En revanche, il est intéressant de remarquer que dans le cas particulier où $\omega = 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. L'intensité du courant traversant le résistor de résistance r est donc nulle, tout comme la tension u à ses bornes. En vertu de la relation (1), il vient alors :

$$\underline{V}_s = \underline{V}_e \quad \text{soit} \quad \underline{T}_2(0) = 1$$

Seule l'expression D satisfait à cette condition, ce qui permet d'éliminer les réponses A, B et C. On ne peut toutefois faire l'économie du calcul de $\underline{T}_2(j\omega)$, car l'étude du cas où $\omega = 0$ ne suffit pas pour assurer la validité de l'expression D.

Pour terminer, signalons que la détermination d'une fonction de transfert conditionne la réussite de l'ensemble d'un exercice consacré à l'étude d'un filtre. Il convient donc d'y consacrer un temps suffisant. Cet investissement s'avèrera payant pour les questions suivantes dont la résolution sera, comme nous le verrons, beaucoup plus rapide.



• Question 7 : réponse **A**

Le module de la fonction de transfert s'écrit :

$$|\underline{T}_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{R_1^2 + (rR_2C\omega)^2}}{\sqrt{R_1^2 + (rR_1C\omega)^2}}$$

Il vient immédiatement :

$$|\underline{T}_2(j\omega)| = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad R_1 = R_2.$$

→ Réponse **A**

• Question 8 : réponse B

Dans le cas où $R_1 = R_2$, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{T}_2(j\omega) = \frac{R_1 - jrR_1C\omega}{R_1 + jrR_1C\omega} = \frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}$$

Le déphasage $\varphi_2(\omega)$ de la tension de sortie $v_s(t)$ par rapport à la tension d'entrée $v_e(t)$ est l'**argument** de la fonction de transfert $\underline{T}_2(j\omega)$:

$$\varphi_2(\omega) = \arg(\underline{T}_2) = \arg\left[\frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}\right] = \arg(1 - jrC\omega) - \arg(1 + jrC\omega)$$

$$\varphi_2(\omega) = \arctan(-rC\omega) - \arctan(rC\omega)$$

La fonction **tangente**, quotient de la fonction **sinus**, impaire, sur la fonction **cosinus**, paire, est donc **impair**, tout comme sa fonction réciproque, **arctan** :

$$\varphi_2(\omega) = -\arctan(rC\omega) - \arctan(rC\omega) = -2\arctan(rC\omega)$$

→ Réponse B

En guise de vérification, on peut remarquer que lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\underline{T}_2(j\omega) \rightarrow -1$.

Or : $\arg(-1) = \pm \pi$ et avec l'expression B : $\varphi_2(\infty) = -2\arctan(\infty) = -2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$.

Les résultats concordent.



Avec les expressions A et C : $\varphi_2(\infty) = \frac{\pi}{2}$ et avec l'expression D : $\varphi_2(\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

Les réponses A, C et D doivent donc être éliminées.

→ QCM 5 Filtre actif

• Question 1 : réponse A

Le raisonnement mis en œuvre pour répondre à cette question est exactement le même que celui du QCM 4, question 6. On se reportera donc aux pages 83 à 86.

Finalement :

$$\underline{T} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R_1 - jrR_2C\omega}{R_1 + jrR_1C\omega}$$

→ Réponse A



Notons qu'aucune des quatre expressions proposées ne peut être éliminée pour cause d'inhomogénéité, toutes étant sans dimension, à l'instar de la fonction de transfert.

En revanche, il est intéressant de remarquer que dans le cas particulier où $\omega = 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. L'intensité du courant traversant le résistor de résistance r est donc nulle, tout comme la tension u à ses bornes. En vertu de la relation (1), il vient alors :

$$\underline{V_s} = \underline{V_e} \quad \text{soit} \quad \underline{T}(0) = 1.$$

Seules les expressions A, B et C satisfont à cette condition, ce qui permet d'éliminer la réponse D.

Par ailleurs, lorsque $\omega \rightarrow \infty$, le condensateur se comporte comme un fil, donc $\underline{V_A} = \underline{V_B} = 0$. En vertu de la relation (3), il vient alors :

$$\underline{V_s} = -\frac{R_2}{R_1} \underline{V_e} \quad \text{soit} \quad \underline{T}(\infty) = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Seule l'expression A satisfait à cette condition, ce qui permet d'éliminer les réponses B, C et D.

• Question 2 : réponse **D**

Le module de la fonction de transfert s'écrit :

$$|T| = \frac{\sqrt{R_1^2 + (rR_2C\omega)^2}}{\sqrt{R_1^2 + (rR_1C\omega)^2}}$$

$|T|$ est indépendant de ω si $\frac{d|T|}{d\omega} = 0$, ce qui donne comme solution évidente :

$$R_2 = R_1 = 1\,000\,\Omega$$

→ Réponse **D**

• Question 3 : réponse **B**

Dans le cas où $R_1 = R_2$, le module de la fonction de transfert s'écrit :

$$|T| = \frac{\sqrt{R_1^2 + (rR_1C\omega)^2}}{\sqrt{R_1^2 + (rR_1C\omega)^2}} = 1$$

→ Réponse **B**

• Question 4 : réponse C

Dans le cas où $R_1 = R_2$, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{R_1 - jrR_1C\omega}{R_1 + jrR_1C\omega} = \frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}$$

Le déphasage φ de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est l'**argument** de la fonction de transfert $\underline{T}$:

$$\varphi = \arg(\underline{T}) = \arg\left[\frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}\right] = \arg(1 - jrC\omega) - \arg(1 + jrC\omega)$$

$$\varphi = \arctan(-rC\omega) - \arctan(rC\omega) = -2\arctan(rC\omega)$$

$$\text{soit finalement : } \tan \frac{\varphi}{2} = -rC\omega \quad \rightarrow \text{Réponse C}$$

• Question 5 : réponse D

D'après la question précédente :

$$r = -\frac{1}{C\omega} \tan \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{10^{-6} \times 10^3} \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1\,000\,\Omega \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$

• Question 6 : réponse C

- L'A.O. étant idéal, $\varepsilon = 0$, donc les résistors de résistances R_1 et r sont disposés en parallèle. Leurs résistances étant égales d'après la question précédente, ils sont parcourus par des courants de même intensité valant en amplitude complexe $\frac{I_e}{2}$.

- L'A.O. étant idéal $i^- = 0$, donc les résistors de résistances R_1 et R_2 sont disposés en série. Par ailleurs, leurs résistances sont égales d'après la question 2.

$$\text{Finalement : } r = R_1 = R_2 = 1\,000\,\Omega.$$

- D'après la loi d'Ohm appliquée aux bornes de l'association $\{R_1, R_2\}$:

$$\frac{I_e}{2} = \frac{V_e - V_s}{R_1 + R_2} = \frac{V_e - V_s}{2r} \quad \text{soit} \quad I_e = \frac{V_e - V_s}{r} \quad (5)$$

D'après la question 4 : $\underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega}$ d'où : $\underline{V}_s = \frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega} \underline{V}_e$.

En reportant dans (5), on obtient :

$$\underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e}{r} \left(1 - \frac{1 - jrC\omega}{1 + jrC\omega} \right) = \frac{2jrC\omega \underline{V}_e}{r(1 + jrC\omega)}$$

Finalement :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e} = \frac{r(1 + jrC\omega)}{2jrC\omega} = \frac{(rC\omega - j)}{2C\omega} = 500(1 - j) \quad \rightarrow \text{Réponse C}$$

→ QCM 6 Filtre actif

• Question 1 : réponse B

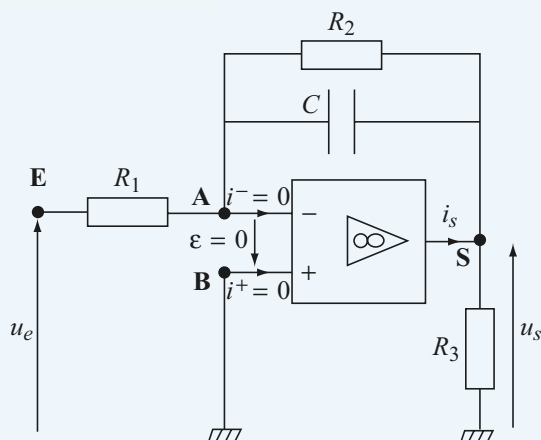
Il est dans l'intérêt d'un candidat de lire toutes les questions d'un énoncé avant de s'employer à les résoudre. Ce QCM l'illustre parfaitement. Dans la question 1, le régime étant continu établi ($\omega = 0$), on peut être tenté de remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert, autrement dit de le supprimer. Toutefois, la résolution des questions 2, 3, 4 et 5 nécessite la détermination préalable de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega)$ du filtre en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . Par économie de temps et d'énergie, il convient donc de déterminer préalablement $\underline{T}(j\omega)$, puis d'étudier la question 1 comme un cas particulier.

La première étape dans la résolution d'un exercice comportant un amplificateur opérationnel idéal fonctionnant en régime linéaire, est de transcrire mathématiquement et sur le schéma la signification des qualificatifs « idéal » et « linéaire ».

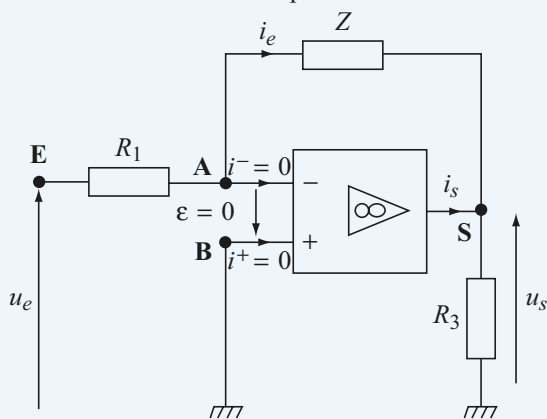
Modélisation d'un A.O. idéal fonctionnant en régime linéaire

- Les courants d'entrée sont nuls : $i^- = i^+ = 0$
- La tension différentielle d'entrée est nulle : $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$





équivalent à :



L'impédance $\underline{Z}$ équivalente à l'association en parallèle du condensateur et du résistor de résistance R_2 vaut :

$$\underline{Z} = \left(\frac{1}{R_2} + jC\omega \right)^{-1} = \left(\frac{1 + jR_2C\omega}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$$

Puisque $i^- = 0$, les dipôles d'impédances R_1 et $\underline{Z}$ sont disposés en série et parcourus par un même courant dont l'intensité instantanée complexe s'écrit :

• d'une part :
$$\underline{i_e}(t) = \frac{u_{EA}(t)}{R_1} = \frac{u_e(t)}{R_1} \quad (1)$$

• et d'autre part :
$$\underline{i_e}(t) = \frac{u_{AS}(t)}{\underline{Z}} = -\frac{u_s(t)}{\underline{Z}} \quad (2)$$

Par substitution de $\underline{i_e}(t)$ entre (1) et (2), on obtient :

$$\underline{u_s}(t) = -\frac{\underline{Z}}{R_1} \underline{u_e}(t) \quad \text{soit} \quad \underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}(t)}{\underline{u_e}(t)} = -\frac{\underline{Z}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1 + jR_1R_2C\omega} \quad (3)$$

Dans le cas particulier du régime continu établi :

$$\omega = 0 \quad \text{donc :} \quad \underline{T}(0) = A_0 = \frac{u_s(t)}{u_e(t)} = -\frac{R_2}{R_1} = -1,2$$

→ Réponse **B**

• Question 2 : réponse **A**

Le gain $G(\omega)$ du filtre est le module de la fonction de transfert :

$$G(\omega) = |\underline{T}(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (R_2C\omega)^2}} \quad (4)$$

$G(\omega)$ apparaît clairement comme étant monotone et strictement décroissante.
Le filtre est donc de type **passé-bas**, et le gain maximal vaut :

$$G_{\max} = G(0) = \frac{R_2}{R_1}$$

La pulsation de coupure ω_0 à -3 dB du filtre est définie par :

$$G(\omega_0) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{2}} = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (R_2C\omega_0)^2}}$$

d'où par identification :

$$\omega_0 = \frac{1}{R_2C} \quad \text{et} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2C} = \frac{1}{2 \times 3,1416 \times 5,6 \cdot 10^{-3} \times 15 \cdot 10^{-9}}$$

$$f_0 = 1\,895 \text{ Hz}$$

→ Réponse **A**

On veillera à ne pas confondre pulsation et fréquence (étourderie classique !).



• Question 3 : réponse D

D'après l'expression (4) du gain établie à la question précédente :

$$G(\omega) = \frac{u_{s,m}}{u_{e,m}} = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (R_2 C \omega)^2}}$$

donc :

$$u_{s,m} = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (R_2 C \omega)^2}} u_{e,m} = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (R_2 C \cdot 2\pi f)^2}} u_{e,m}$$

et numériquement :

$$u_{s,m} = \frac{5,6 \cdot 10^3}{4,7 \cdot 10^3 \sqrt{1 + (5,6 \cdot 10^3 \times 15 \cdot 10^{-9} \times 2 \times 3,14 \times 5,2 \cdot 10^3)^2}} \cdot 8 = 3,3 \text{ V}$$

→ Réponse D

• Question 4 : réponse C

L'expression (3) de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega)$ a été établie à la question 1 :

$$\underline{T}(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1 + jR_1 R_2 C \omega}$$

Le déphasage φ de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée est l'**argument** de la fonction de transfert :

$$\varphi = \arg[\underline{T}(j\omega)] = \arg\left[-\frac{R_2}{R_1 + jR_1 R_2 C \omega}\right] = \arg(-R_2) - \arg(R_1 + jR_1 R_2 C \omega)$$

$$\varphi = 180 - \arctan(R_2 C \omega) = 110^\circ$$

→ Réponse C



- On veillera dans cette question à ne pas oublier le signe moins dans l'expression de $\underline{T}(j\omega)$. On rappelle à cette occasion que l'argument d'un réel positif vaut 0, et que l'argument d'un réel négatif vaut π radian ou 180° .
- Attention aussi à ne pas confondre les modes degré et radian dans la configuration de la calculatrice.

• Question 5 : réponse C

Notons i_3 l'intensité du courant circulant dans le résistor de résistance R_3 , dans le sens conforme aux conventions « récepteur ».

Au nœud S, la loi des nœuds s'écrit en amplitude complexe :

$$\underline{i}_{s,m} = \underline{i}_{3,m} - \underline{i}_{e,m} = \frac{\underline{u}_{s,m}}{R_3} - \frac{\underline{u}_{e,m}}{R_1} = \frac{\underline{u}_{s,m} \cdot e^{j\varphi}}{R_3} - \frac{\underline{u}_{e,m}}{R_1} = \left(\frac{\underline{u}_{s,m} \cdot \cos \varphi}{R_3} - \frac{\underline{u}_{e,m}}{R_1} \right) + j \frac{\underline{u}_{s,m} \cdot \sin \varphi}{R_3}$$

d'où l'amplitude du courant de sortie :

$$i_{s,m} = |\underline{i}_{s,m}| = \sqrt{\left(\frac{\underline{u}_{s,m} \cdot \cos \varphi}{R_3} - \frac{\underline{u}_{e,m}}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{\underline{u}_{s,m} \cdot \sin \varphi}{R_3} \right)^2}$$

$$i_{s,m} = \sqrt{\left[\frac{3,3 \cdot \cos(110)}{2 \cdot 10^3} - \frac{8}{4,7 \cdot 10^3} \right]^2 + \left[\frac{3,3 \cdot \sin(110)}{2 \cdot 10^3} \right]^2} = 2,7 \text{ mA}$$

→ Réponse C

- Attention à ne pas confondre i_s et i_3 .

- La loi des nœuds est fautive en amplitude : $i_{s,m} \neq i_{3,m} - i_{e,m}$



• Question 6 : réponse B

Attention : les résultats des questions précédentes ne sont valables qu'en régime sinusoïdal forcé. La tension d'entrée étant maintenant une tension crête, il faut établir l'équation différentielle reliant $u_e(t)$ et $u_s(t)$. Pour cela, on peut bien sûr avoir recours aux équations des mailles et des nœuds, mais il existe une façon plus rapide et plus élégante d'obtenir l'équation différentielle.

En régime sinusoïdal forcé et en notation complexe, si une tension s'écrit

$$\underline{u}(t) = u_m e^{j(\omega t + \varphi)}, \text{ alors : } \frac{d\underline{u}}{dt} = j\omega \underline{u} \text{ et } \int \underline{u} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{u}.$$

Transposition permettant de passer de la fonction de transfert à l'équation différentielle, et réciproquement

Fonction de transfert	Équation différentielle
$j\omega \underline{u}$	$\frac{du}{dt}$
$\frac{1}{j\omega} \underline{u}$	$\int u dt$

La fonction de transfert établie à la question 1 s'écrit :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s(t)}{\underline{u}_e(t)} = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{1 + jR_2C\omega} \right) \quad \text{soit} \quad \underline{u}_s(t) = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{1 + jR_2C\omega} \right) \underline{u}_e(t) .$$

$$\text{Numériquement : } R_2C\omega = 26 \gg 1$$

$$\text{donc : } \underline{u}_s(t) = -\frac{1}{jR_1C\omega} \underline{u}_e(t) \quad \text{transposable en : } u_s(t) = -\frac{1}{R_1C} \int u_e(t) dt .$$

En haute fréquence, le filtre a donc un comportement **intégrateur**. $u_e(t)$ étant constante par morceaux, $u_s(t)$ est affine par morceaux.
La tension de sortie est donc de forme triangulaire.

→ Réponse **B**

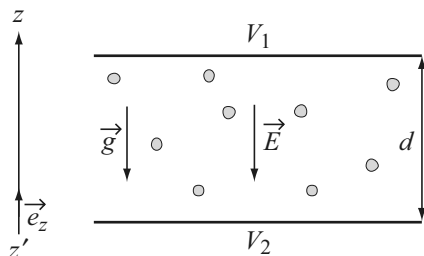
chapitre 3

Mécanique

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Brouillard	96	108
• QCM 2 : Électron dans un champ électrique et magnétique	97	112
• QCM 3 : Pendule en translation	99	121
• QCM 4 : Looping	101	127
• QCM 5 : Interaction gravitationnelle	103	132
• QCM 6 : Satellite	106	137

→ QCM 1 Brouillard

• Question 1



On disperse un brouillard de fines gouttelettes sphériques d'huile, de masse volumique $\rho_h = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, dans l'espace séparant les deux plaques horizontales d'un condensateur plan distantes de $d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Les gouttelettes obtenues sont chargées négativement en raison des frottements qu'elles subissent à

la sortie du pulvérisateur et sont supposées ne pas avoir de vitesses initiales (cf. figure ci-dessus). Toutes les gouttelettes sphériques ont même rayon R mais n'ont pas forcément la même charge $-q$. En l'absence de champ électrique $\vec{E}$ une gouttelette est soumise à son poids (on prendra pour l'accélération de la pesanteur la valeur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$), à la poussée d'Archimède de la part de l'air ambiant de masse volumique $\rho_a = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f}$, proportionnelle et opposée à sa vitesse $\vec{v}$, de norme $f = 6\pi\eta R \|\vec{v}\|$, où $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ S.I.}$ est le coefficient de viscosité de l'air.

Montrer que la vitesse $\vec{v}(t)$ des gouttelettes peut se mettre sous la forme :

$$\vec{v}(t) = -v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot \vec{e}_z$$

Exprimer τ .

A $\tau = \frac{9 \rho_h R^3}{2 \eta}$
B $\tau = \frac{2 \rho_a R}{3 \eta}$
C $\tau = \frac{4 \rho_a R^2}{9 \eta}$
D $\tau = \frac{2 \rho_h R^2}{9 \eta}$

• Question 2

Exprimer v_0 .

A $v_0 = \frac{2R^2}{9\eta} (\rho_h - \rho_a) g$
B $v_0 = \frac{9R^2}{2\pi\eta} (\rho_h - \rho_a) g$

C $v_0 = \frac{9R^2}{2\eta} (\rho_a - \rho_h) g$
D $v_0 = \frac{4\pi R^3}{3\eta} (\rho_h + \rho_a) g$

• Question 3

On mesure une vitesse limite $v_0 = 2.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$. Calculer le rayon R des gouttelettes d'huile.

A $R = 2,53.10^{-6} \text{ m}$

B $R = 7,42.10^{-6} \text{ m}$

C $R = 1,13.10^{-6} \text{ m}$

D $R = 4,67.10^{-6} \text{ m}$

• Question 4

On applique une différence de potentiel $U = V_1 - V_2 > 0$ aux bornes du condensateur de façon à ce que le champ électrique $\vec{E}$ uniforme et constant qui apparaît dans l'espace compris entre les armatures soit dirigé suivant la verticale descendante (cf. figure de la question 1).

Exprimer la relation qui existe entre U et la norme E du champ électrique.

A $U = \frac{E}{d}$

B $U = Ed$

C $U = \frac{d}{E}$

D $U = 2 \frac{E}{d}$

• Question 5

Une gouttelette est immobilisée pour $U = 3200 \text{ V}$. Calculer la valeur absolue q de sa charge.

A $q = 4,8.10^{-19} \text{ C}$

B $q = 1,6.10^{-19} \text{ C}$

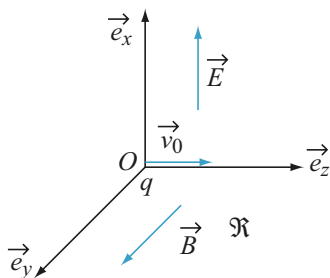
C $q = 8,0.10^{-19} \text{ C}$

D $q = 3,2.10^{-19} \text{ C}$

→ QCM 2 Électron dans un champ électrique et magnétique

• Question 1

Un électron de charge $q \approx -1,6.10^{-19} \text{ C}$ et de masse $m \approx 9,1.10^{-31} \text{ kg}$, assimilé à un point matériel M, évolue dans le référentiel du laboratoire $\mathfrak{R}$ supposé galiléen et muni d'un repère cartésien $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, sous l'action d'un champ électrique $\vec{E} = E. \vec{e}_x$ et d'un champ magnétique $\vec{B} = B. \vec{e}_y$, tous deux uniformes et stationnaires. On désigne par x , y et z les coordonnées cartésiennes de M dans $\mathfrak{R}$, et



par $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_z$ la vitesse initiale de M telle que $v_0 = 500 \text{ km.s}^{-1}$ (figure ci-contre). On place en $z_0 = 10 \text{ cm}$ un écran d'observation Π parallèle au plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, destiné à intercepter M.

Dans le cas particulier où $B = 0$, et $E = 0 \text{ V.m}^{-1}$, déterminer l'abscisse x_e de M sur E.

- A** $x_e = 7,2 \text{ mm}$ **B** $x_e = 3,5 \text{ mm}$ **C** $x_e = -3,5 \text{ cm}$ **D** $x_e = -7 \text{ cm}$

• Question 2

Dans le cas particulier où $E = 10 \text{ V.m}^{-1}$, et $B = 10^{-5} \text{ T}$, la trajectoire est un cercle de rayon R . Calculer R .

- A** $R = 10,9 \text{ cm}$ **B** $R = 13,8 \text{ cm}$ **C** $R = 15,1 \text{ cm}$ **D** $R = 28,4 \text{ cm}$

• Question 3

Que vaut alors l'abscisse x_m de M sur Π ?

- A** $x_m = 1,8 \text{ cm}$ **B** $x_m = 3,8 \text{ cm}$ **C** $x_m = -4,3 \text{ cm}$ **D** $x_m = -6,6 \text{ cm}$

• Question 4

En supposant $E = 1 \text{ kV.m}^{-1}$, déterminer B afin que le mouvement de M soit rectiligne et uniforme.

- A** $B = 2 \text{ T}$ **B** $B = 2 \text{ mT}$ **C** $B = -4 \text{ mT}$ **D** $B = -200 \text{ mT}$

• Question 5

On suppose E et B non nuls et on pose $\omega_c = \frac{qB}{m}$. L'équation différentielle d'évolution de l'abscisse x de M s'écrit sous la forme $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_c^2 x = a$, où a est une constante indépendante du temps. Déterminer a .

A $a = \frac{q}{m}(E + Bv_0)$

B $a = -\frac{q}{m}(E + Bv_0)$

C $a = \frac{q}{m}(Bv_0 - E)$

D $a = \frac{q}{m}(E - Bv_0)$

• Question 6

On suppose $B = \frac{2E}{v_0}$. Exprimer $x(t)$.

A $x(t) = -\frac{mE}{qB^2}[1 + \cos(\omega_c t)]$

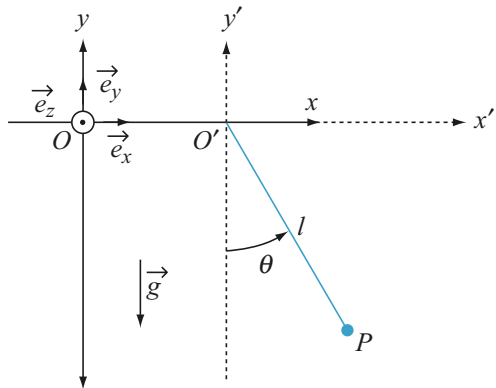
B $x(t) = \frac{mE}{qB^2}[\cos(\omega_c t) - 1]$

C $x(t) = \frac{mE}{qB^2}[1 - \cos(\omega_c t)]$

D $x(t) = \frac{mE}{qB^2}[1 + \cos(\omega_c t)]$

→ QCM 3 Pendule en translation

On désigne par $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ un repère d'origine O' dont les axes orthogonaux $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ sont respectivement parallèles aux axes Ox , Oy et Oz d'un repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ que l'on supposera galiléen. Un pendule simple est constitué d'un point matériel P de masse m , suspendu à l'origine O' de $\mathcal{R}'$ par un fil sans masse ni raideur et de longueur ℓ . On note θ l'angle que fait le fil, que l'on



supposera constamment tendu, avec la verticale Oy de $\mathcal{R}$ (cf figure ci-dessus). Dans un premier temps, l'origine O' de $\mathcal{R}'$ reste confondue avec l'origine O de $\mathcal{R}$.

• Question 1

Quelle doit être la longueur ℓ du fil pour que la période des petits mouvements du pendule soit $T_0 = 1$ s ? On prendra pour norme de l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_y$, la valeur $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

- A** $\ell = 1,141 \text{ m}$ **B** $\ell = 0,714 \text{ m}$ **C** $\ell = 1,312 \text{ m}$ **D** $\ell = 0,248 \text{ m}$

• Question 2

Le repère $\mathcal{R}'$ est maintenant animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré d'accélération constante $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_x$.

Calculer le moment $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie})$ par rapport au point O' de la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ qui s'applique au point P dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

- A** $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = -m\ell a \cos\theta \cdot \vec{e}_z$ **B** $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = m\ell a (\cos\theta - \sin\theta) \cdot \vec{e}_z$
C $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = m\ell a (\cos\theta + \sin\theta) \cdot \vec{e}_x$ **D** $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = -m\ell a \sin\theta \cdot \vec{e}_y$

• Question 3

Calculer le moment $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ic})$ par rapport au point O' de la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$ qui s'applique au point P dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

- A** $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ic}) = -m\ell^2 a \cdot \vec{e}_z$ **B** $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ic}) = m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \vec{e}_x$
C $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ic}) = -m\ell \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{e}_z$ **D** $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ic}) = \vec{0}$

• Question 4

Déduire du théorème du moment cinétique appliqué en O' dans $\mathcal{R}'$ au point matériel P l'équation différentielle à laquelle obéit l'angle θ .

- A** $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{\ell} \cos\theta + \frac{a}{\ell} \sin\theta$ **B** $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{a}{\ell} \cos\theta + \frac{g}{\ell} \sin\theta$
C $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{a}{\ell} \sin\theta + \frac{g}{\ell} \cos\theta$ **D** $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta - \frac{a}{\ell} \cos\theta$

• Question 5

Déterminer la valeur θ_0 de l'angle θ correspondant à la position d'équilibre du pendule.

A $\theta_0 = -\arctan \frac{a}{g}$

B $\theta_0 = \arctan \frac{a}{g}$

C $\theta_0 = \arctan \frac{g}{a}$

D $\theta_0 = -\arctan \frac{g}{a}$

• Question 6

Exprimer la période T des petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_0 en fonction de ℓ , a et g .

A $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell a}{a^2 + g^2}}$

B $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$

C $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell g}{a^2 + g^2}}$

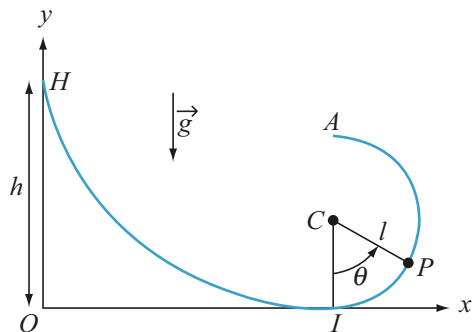
D $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{a + g}}$

→ QCM 4 Looping

• Question 1

Un mobile P assimilé à un point matériel de masse m , se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Le rail comporte une partie IA constituée d'un demi cercle de centre C et de diamètre $IA = 2\ell$. On néglige tout frottement et la liaison entre le mobile et le rail est unilatérale, c'est-à-dire que la réaction $\vec{R}$ exercée par le rail sur

le mobile ne peut changer de sens. La position du point P lorsque sa trajectoire est à l'intérieur du demi cercle est repérée par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CP} \right)$ (cf. figure ci-dessus). On désigne par g la norme de l'accélération de la pesanteur.



À l'instant $t = 0$, le mobile est libéré en H sans vitesse initiale à la hauteur h au-dessus de I , point le plus bas du demi-cercle.

Exprimer en fonction de ℓ , h , g et θ , la norme v_p de la vitesse du point P lorsqu'il est à l'intérieur du demi cercle.

A $v_p = \sqrt{2g[h - \ell(1 - \cos\theta)]}$

B $v_p = \sqrt{2gh \cos\theta}$

C $v_p = \sqrt{2g[h + \ell(1 - \sin\theta)]}$

D $v_p = \sqrt{2g(h - \ell \cos\theta)}$

• Question 2

Donner l'expression de la norme R de la réaction $\vec{R}$ exercée par le rail sur le point P .

A $R = \frac{2mg}{\ell}(h - \ell + \ell \cos\theta)$

B $R = \frac{mg}{\ell}(h + \ell - \ell \cos\theta)$

C $R = \frac{2mg}{\ell}(h - \ell + \ell \sin\theta)$

D $R = \frac{mg}{\ell}(2h - 2\ell + 3\ell \cos\theta)$

• Question 3

De quelle hauteur minimale h_m doit-on lâcher le mobile sans vitesse initiale en H pour qu'il arrive jusqu'en A , point le plus haut du demi cercle ?

A $h_m = \frac{5}{2}\ell$

B $h_m = 2\ell$

C $h_m = \ell$

D $h_m = \frac{3}{2}\ell$

• Question 4

Donner dans ces conditions ($h = h_m$) l'expression de la réaction R_I en I , point le plus bas de la trajectoire.

A $R_I = 3mg$

B $R_I = 2mg$

C $R_I = 6mg$

D $R_I = \frac{5}{2}mg$

• Question 5

Exprimer la norme v_A de la vitesse du mobile lorsqu'il arrive au point A après avoir été lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur $h = h_m$.

A $v_A = \sqrt{2g\ell}$

B $v_A = \sqrt{g\ell}$

C $v_A = \sqrt{2gh}$

D $v_A = 0$

• Question 6

On désigne par x_C l'abscisse du centre du demi cercle. Calculer, pour $h = h_m$, l'abscisse x_0 du point P lorsque la trajectoire du mobile coupe l'axe Ox tangent au demi-cercle en I après être passée par le point A .

A $x_0 = x_C$

B $x_0 = -\ell$

C $x_0 = x_C - 2\ell$

D $x_0 = 0$

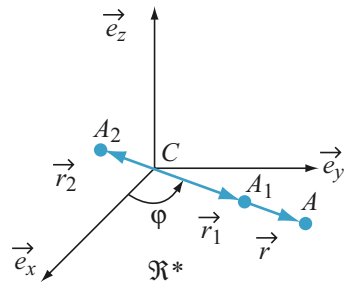
→ QCM 5 Interaction gravitationnelle

• Question 1

Deux corps assimilés à des points matériels A_1 et A_2 , de masses respectives m_1 et m_2 , évoluent librement du reste de l'univers sous la seule action des forces de gravitation qu'elles exercent l'une sur l'autre. On note C le centre de masse du système, $\vec{r}_1 = \vec{CA}_1$ et $\vec{r}_2 = \vec{CA}_2$ les rayons vecteurs des deux corps et $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI la constante de gravitation universelle. Ce problème à deux corps se réduit, dans le référentiel galiléen $\mathfrak{R}^*$

du centre de masse, à l'étude du mouvement d'un point matériel *fictif* A de masse μ , de rayon vecteur $\vec{r} = \vec{CA} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (cf. figure ci-contre), soumis à la force

$$\vec{F}_g = - \frac{Gm_1m_2}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}.$$



Exprimer μ en fonction de m_1 et m_2 .

A $\mu = m_1 + m_2$

B $\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$

C $\mu = (m_1 m_2)^{1/2}$

D $\mu = \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$

• Question 2

Quelles sont, au cours du mouvement de A, les grandeurs conservatives ?

A L'énergie mécanique de A.

B L'énergie potentielle de A.

C L'énergie cinétique de A.

D Le moment cinétique de A en C.

• Question 3

Le référentiel $\mathcal{R}^*$ est muni du repère cartésien $\{C, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. Le mouvement de A s'effectue dans le plan $\left(\vec{C}, \vec{e}_x, \vec{e}_y \right)$. On désigne respectivement par $r = \|\vec{r}\|$ et $\varphi(\vec{e}_x, \vec{r})$ la coordonnée radiale et l'angle orienté du système de coordonnées polaires. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de A.

A $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$

B $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] - \frac{Gm_1 m_2}{r}$

C $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{Gm_1 m_2}{r}$

D $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] + \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$

• Question 4

Donner l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ de A en fonction de $r(\varphi)$, $\frac{dr}{d\varphi}$, μ et L_z la composante sur l'axe $\left(C, \vec{e}_z\right)$ du moment cinétique de A en C .

A $\mathcal{E}_c = \frac{\mu L_z^2}{2r^2} \left(1 + \frac{1}{r} \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \right)$

B $\mathcal{E}_c = \frac{\mu L_z^2}{2r^2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \right)$

C $\mathcal{E}_c = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]$

D $\mathcal{E}_c = \frac{\mu L_z^2}{2r^2} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]$

• Question 5

En introduisant la fonction $u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$ dans les expressions précédentes, on établit l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}$. Expliciter p .

A $p = \frac{\mu L_z^2}{2Gm_1 m_2} + \frac{Gm_1 m_2}{2\mathcal{E}_m}$

B $p = \frac{L_z^2}{\mu Gm_1 m_2}$

C $p = \frac{L_z^2}{2\mu Gm_1 m_2} + \frac{Gm_1 m_2}{2\mathcal{E}_m}$

D $p = \frac{Gm_1 m_2}{2\mathcal{E}_m}$

• Question 6

Le système à deux corps constitué par une sonde interplanétaire et la Terre, que l'on assimile à des points matériels, est supposé isolé du reste de l'Univers. La sonde, de masse m_1 négligeable devant celle de la Terre, se confond avec le point matériel fictif A précédemment étudié, tandis que la Terre se confond avec le centre de masse C du système. Calculer la vitesse de libération v_l de la sonde dans $\mathfrak{R}^*$ à une altitude de 400 km pour une masse $m_2 = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg de la Terre, supposée sphérique, de rayon $R_T = 6\,470$ km.

A $v_l = 10,8 \text{ km.s}^{-1}$

B $v_l = 341 \text{ km.s}^{-1}$

C $v_l = 10\,800 \text{ km.s}^{-1}$

D $v_l = 38\,800 \text{ km.s}^{-1}$

→ QCM 6 Satellite

• Question 1

On désigne par $\mathfrak{R}_G(T, \vec{e}_{x0}, \vec{e}_{y0}, \vec{e}_{z0})$ un référentiel dont l'origine coïncide avec le centre T de la Terre et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes de la sphère céleste. Dans ce référentiel que l'on suppose galiléen, la Terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_{z0}$. La Terre, de masse M , est supposée sphérique de rayon R et parfaitement homogène.

Un satellite de masse m , supposé ponctuel et exclusivement soumis à la force de gravitation de la Terre, est placé sur une orbite circulaire à une altitude h . L'application du théorème du moment cinétique au satellite en T dans $\mathfrak{R}_G$ montre que sa trajectoire dans $\mathfrak{R}_G$:

- A** est plane et contient le centre de la Terre.
- B** est plane et doit nécessairement contenir l'axe des pôles.
- C** est plane et parallèle au plan équatorial.
- D** est plane et doit nécessairement contenir le plan équatorial.

• Question 2

Calculer la vitesse v_0 du satellite sur sa trajectoire dans $\mathfrak{R}_G$ en fonction de son altitude h . On désigne par G la constante de gravitation universelle.

- A** $v_0 = G\sqrt{\frac{M}{R+h}}$
- B** $v_0 = G\sqrt{\frac{M}{h}}$
- C** $v_0 = \sqrt{\frac{MG}{R+h}}$
- D** $v_0 = \sqrt{\frac{MG}{h}}$

• Question 3

Calculer la période de révolution T_0 du mouvement du satellite en fonction de son altitude h .

- A** $T_0 = 2\pi \frac{MG}{\sqrt{(R+h)^3}}$
- B** $T_0 = 2\pi \frac{\sqrt{(R+h)^3}}{MG}$
- C** $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{MG}{R+h}}$
- D** $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{MG}}$

• Question 4

Calculer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{\text{mt}}$ du satellite sur sa trajectoire dans $\mathfrak{R}_G$.

A $\mathcal{E}_{\text{mt}} = \frac{mMG}{R+h}$

B $\mathcal{E}_{\text{mt}} = -\frac{mMG}{2(R+h)}$

C $\mathcal{E}_{\text{mt}} = \frac{mMG}{2(R+h)}$

D $\mathcal{E}_{\text{mt}} = -\frac{mMG}{R+h}$

• Question 5

Calculer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{\text{ms}}$ du satellite lorsqu'il est immobile au sol en un point M de la Terre situé à la latitude λ .

A $\mathcal{E}_{\text{ms}} = -\frac{mMG}{R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin^2 \lambda$

B $\mathcal{E}_{\text{ms}} = \frac{mMG}{2R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \cos \lambda$

C $\mathcal{E}_{\text{ms}} = -\frac{mMG}{R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \cos^2 \lambda$

D $\mathcal{E}_{\text{ms}} = \frac{mMG}{2R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \sin \lambda$

• Question 6

Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_{\text{sat}}$ qu'il est nécessaire de fournir au satellite pour le placer sur son orbite.

A $\mathcal{E}_{\text{sat}} = m \left[\frac{MG}{2R} \left(1 - \frac{h}{R+h} \right) + \frac{R^2\Omega^2}{2} \sin^2 \lambda \right]$

B $\mathcal{E}_{\text{sat}} = m \left[\frac{MG}{2R} \left(1 + \frac{R}{h} \right) + \frac{R^2\Omega^2}{4} \sin^2 \lambda \right]$

C $\mathcal{E}_{\text{sat}} = m \left[\frac{MG}{R} \left(1 - \frac{R+h}{R} \right) - \frac{R^2\Omega^2}{2} \cos \lambda \right]$

D $\mathcal{E}_{\text{sat}} = m \left[\frac{MG}{2R} \left(1 + \frac{h}{R+h} \right) - \frac{R^2\Omega^2}{2} \cos^2 \lambda \right]$

→ QCM 1 Brouillard

• Question 1 : réponse D

Dans le référentiel du laboratoire, supposé fixe et galiléen, chaque gouttelette est soumise à trois forces :

- son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h \vec{g}$
- la poussée d'Archimède, égale à l'opposé du poids du volume d'air déplacé par la gouttelette : $\vec{F}_A = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \vec{g}$
- la force de frottement visqueux : $\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v}$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la gouttelette de masse

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h \text{ s'écrit : } \quad \sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h \vec{g} - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{v} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho_h R^2} \vec{v} + \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_h}\right) \vec{g}$$

La vitesse initiale de la gouttelette étant nulle, son mouvement se fait suivant l'axe vertical Oz . La projection de la relation précédente sur cet axe donne :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho_h R^2} v_z = g \left(\frac{\rho_a}{\rho_h} - 1 \right)$$



Attention : $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$

En posant $\tau = \frac{2}{9} \frac{\rho_h R^2}{\eta}$, on obtient finalement :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau} v_z = g \left(\frac{\rho_a}{\rho_h} - 1 \right)$$

Cette équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre en v_z , avec 2nd membre constant, admet pour solution :

$$v_z(t) = v_{z,1}(t) + v_{z,2}$$

avec :

- $v_{z,1}(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ solution de l'équation différentielle sans second membre ;
- $v_{z,2} = C^{ste} = \frac{2R^2}{9\eta}(\rho_a - \rho_h)g$ solution particulière de l'équation avec second membre.

Donc :

$$v_z(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{2R^2}{9\eta}(\rho_a - \rho_h)g$$

La constante d'intégration A est déterminée à l'aide de la condition initiale :

$$v_z(0) = 0 = A + \frac{2R^2}{9\eta}(\rho_a - \rho_h)g \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{2R^2}{9\eta}(\rho_a - \rho_h)g.$$

Finalement :

$$\vec{v}(t) = -\frac{2R^2}{9\eta}(\rho_h - \rho_a)g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot \vec{e}_z$$

$\vec{v}(t)$ est bien de la forme proposée avec $\tau = \frac{2}{9} \frac{\rho_h R^2}{\eta}$ et $v_0 = \frac{2R^2}{9\eta}(\rho_h - \rho_a)g$.

→ Réponse **D**

Vérifions que τ est bien homogène à un temps.

- L'unité de la viscosité est établie à partir de l'expression de la force de frottement proposée par l'énoncé :

$$f = 6\pi\eta Rv \quad \text{donc :} \quad \eta = \frac{f}{6\pi Rv} \quad \text{et } \eta \text{ s'exprime en :} \quad \frac{[\text{N}]}{[\text{m}] \cdot [\text{m.s}^{-1}]} = \frac{[\text{N}] \cdot [\text{s}]}{[\text{m}]^2}$$

- Dès lors, τ s'exprime en : $\frac{[\text{kg.m}^{-3}] \cdot [\text{m}]^2}{[\text{N.s.m}^{-2}]} = \frac{[\text{kg}] \cdot [\text{m}]}{[\text{N}] \cdot [\text{s}]}$ et, de la relation du poids

$$P = mg, \text{ on tire aisément :} \quad [\text{N}] = [\text{kg}] \cdot [\text{m.s}^{-2}], \text{ d'où :} \quad \frac{[\text{kg}] \cdot [\text{m}]}{[\text{N}] \cdot [\text{s}]} = [\text{s}].$$



Seules les expressions de τ des réponses C et D sont homogènes à un temps. Pour cette raison, les réponses A et B pouvaient être éliminées.

• Question 2 : réponse A

L'expression de v_0 a été établie à la question précédente :

$$v_0 = \frac{2R^2}{9\eta}(\rho_h - \rho_a)g$$

→ Réponse A

Vérifions que cette expression est bien homogène à une vitesse.

$$\frac{2R^2}{9\eta}(\rho_h - \rho_a)g \quad \text{s'exprime en :} \quad \frac{[\text{m}]^2 \cdot [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]}{[\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}]} = \frac{[\text{kg}] \cdot [\text{m}]^2}{[\text{N}] \cdot [\text{s}]^3} = \frac{[\text{m}]}{[\text{s}]}$$



- Les quatre expressions proposées ayant la dimension d'une vitesse, aucune ne peut être éliminée pour cause d'inhomogénéité.
- Le mouvement des gouttelettes étant nécessairement vertical **descendant**, v_0 doit être **positif**. L'expression de la réponse C est donc fausse.
- L'expression de la réponse D est également fausse, mais pour une raison plus subtile : ρ_h et ρ_a , qui interviennent respectivement dans le poids et la poussée d'Archimède, **forces de sens contraires**, doivent forcément être associées par une **différence**, et non par une somme !

• Question 3 : réponse C

D'après l'expression de v_0 établie à la question 1 :

$$R = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2(\rho_h - \rho_a)g}} = \sqrt{\frac{9 \times 1,8 \cdot 10^{-5} \times 2 \cdot 10^{-4}}{2 \times (1,3 \cdot 10^3 - 1,3) \times 9,81}} = 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

→ Réponse C

• Question 4 : réponse B

Condensateur plan idéal

Un condensateur plan idéal est constitué de deux armatures planes parallèles, de dimensions grandes devant la distance qui les sépare, ce qui permet de négliger les effets de bord. Dans ce cas :

- les surfaces équipotentielles sont des **plans parallèles aux armatures**. Les armatures sont elles-mêmes deux surfaces équipotentielles.
- le champ électrique $\vec{E}$, orthogonal par nature aux surfaces équipotentielles, est donc **orthogonal aux armatures**, et orienté dans le sens des potentiels décroissants. De plus, $\vec{E}$ est à **norme uniforme**.

Ici, d'après l'énoncé : $\vec{E} = -E \cdot \vec{e}_z$ et $V = V(z)$.

Par conséquent, la relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ se réduit à $E = \frac{dV}{dz}$
et puisque E est uniforme :

$$E = \frac{V_1 - V_2}{z_1 - z_2} = \frac{U}{d} \quad \text{d'où :} \quad U = Ed. \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$

L'analyse dimensionnelle s'avère particulièrement payante dans cette question :

- l'unité du potentiel et de la tension est le **Volt** ;
- l'unité du champ électrique est le **Volt.mètre⁻¹**. Il est possible de la retrouver à l'aide de la relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ dans laquelle les coordonnées du vecteur gradient sont toujours des dérivées par rapport aux coordonnées d'espace (donc : mètre⁻¹).

La réponse B est la seule qui propose une expression qui respecte les dimensions. Toutes les autres doivent être éliminées.



• Question 5 : réponse A

En présence du champ électrique $\vec{E}$, chaque gouttelette est maintenant soumise à quatre forces :

- son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_h \vec{g}$
- la poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_a \vec{g}$
- la force de frottement visqueux : $\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v}$
- La force électrique : $\vec{F}_e = -q\vec{E}$

Le principe fondamental de la **statique** appliqué à la gouttelette s'écrit :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_h \vec{g} - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_a \vec{g} - 6\pi\eta R \underbrace{\vec{v}}_0 - q\vec{E} = \vec{0}$$

et en projection sur l'axe Oz :

$$-\frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_h - \rho_a) g + qE = 0$$

soit : $q = \frac{4\pi R^3 (\rho_h - \rho_a) g d}{3U}$

$$q = \frac{4 \times 3,14 \times (1,13 \cdot 10^{-6})^3 \times (1,3 \cdot 10^3 - 1,3) \times 9,81 \times 2 \cdot 10^{-2}}{3 \times 3200}$$

$$q = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

→ Réponse A



Toutes les valeurs de q proposées représentant des **multiples** de la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, aucune réponse ne peut être écartée.

→ QCM 2 Électron dans un champ électrique et magnétique

• Question 1 : réponse **C**

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen, l'électron est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P} = m \vec{g}$
- la force électrique $\vec{F}_e = q \vec{E}$

Numériquement :

$$P = mg = 9,1 \cdot 10^{-31} \times 9,8 = 8,9 \cdot 10^{-30} \text{ N}$$

$$\text{et } F_e = |q|E = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10 = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ N}$$

On pourra donc négliger l'action du poids.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m \vec{a} \\ q \vec{E} &= m \vec{a} \end{aligned}$$

soit, en projection dans la base cartésienne, le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = \frac{qE}{m} \\ \frac{d^2 y}{dt^2}(t) = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = 0 \end{cases}$$

Compte tenu des conditions initiales $M(t=0) = O$ et $\vec{v}(t=0) = v_0 \cdot \vec{e}_z$, on obtient par deux intégrations successives les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur position à un instant t quelconque :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \frac{qE}{m}t \\ \frac{dy}{dt}(t) = 0 \\ \frac{dz}{dt}(t) = v_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{qE}{2m}t^2 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_0 t \end{cases}$$

La trajectoire de l'électron est donc située dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$. Elle est **parabolique**, et son équation cartésienne est obtenue en substituant le temps des expressions de $x(t)$ et $z(t)$:

$$t = \frac{z}{v_0} \quad \text{donc} \quad x(z) = \frac{qE}{2mv_0^2} z^2$$

L'abscisse x_e de l'électron sur l'écran vaut alors :

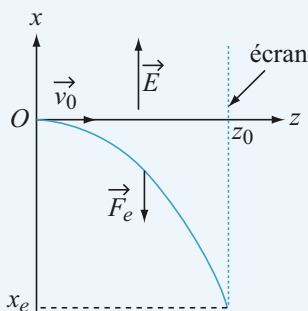
$$x_e = x(z_0) = \frac{qE}{2mv_0^2} z_0^2 = \frac{-1,6 \cdot 10^{-19} \times 10}{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 500\,000^2} \times 0,1^2 = -3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$x_e = -3,5 \text{ cm}$$

→ Réponse **C**



Le champ électrique étant orienté dans le sens des x positifs, et l'électron étant chargé négativement, la force électrique est orientée **dans le sens des x négatifs**. Les réponses A et B qui proposent une déflexion vers les x positifs doivent donc être éliminées.



• Question 2 : réponse **D**

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen, l'électron est soumis à deux forces :

- son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

- la force magnétique : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qBv_z \\ 0 \\ qBv_x \end{pmatrix}$

en particulier, à l'instant initial : $\vec{F}_m(t=0) = -qBv_0 \cdot \vec{e}_x$ force orientée **dans le sens des x positifs**.

Attention : q est négatif !

Numériquement :

$$P = mg = 8,9 \cdot 10^{-30} \text{ N}$$

$$\text{et } F_m(t=0) = |q|Bv_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^{-5} \times 500\,000 = 8 \cdot 10^{-19} \text{ N}$$

On pourra donc négliger l'action du poids.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} -qBv_z \\ 0 \\ qBv_x \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}$$

Compte tenu de la direction de $\vec{v}_0$, la trajectoire de l'électron est située dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$. On obtient alors le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB}{m} v_z & (1) \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{qB}{m} v_x & (2) \end{cases}$$

Attention : v_x et v_z étant **variables**, ces équations différentielles sont **couplées** en v_x et v_z . Il n'est donc pas possible de les résoudre directement : il faut au préalable les rendre indépendantes.

- À l'aide des équations $\frac{d(1)}{dt}$ et (2), on obtient :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{qB}{m} \frac{dv_z}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

- À l'aide des équations $\frac{d(2)}{dt}$ et (1), on obtient :

$$\frac{d^2 v_z}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_x}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_z$$

soit finalement le système d'équations différentielles **indépendantes** du 2nd ordre, sans second membre et sans dérivée première :

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0 \\ \frac{d^2 v_z}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_z = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0 \\ \frac{d^2 v_z}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

de solutions :

$$\begin{cases} v_x(t) = A \cdot \cos\left(-\frac{qB}{m}t + \varphi\right) \\ v_z(t) = D \cdot \cos\left(-\frac{qB}{m}t + \psi\right) \end{cases}$$

La détermination des quatre constantes d'intégration A , D , φ et ψ nécessite de disposer de quatre conditions initiales :

- deux sont explicitement fournies par l'énoncé :

$$v_x(t=0) = A \cdot \cos \varphi = 0 \quad (5)$$

$$v_z(t=0) = D \cdot \cos \psi = v_0 \quad (6)$$

- les deux autres sont déduites des relations (1) et (2) :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}(t) = A \frac{qB}{m} \cdot \sin\left(-\frac{qB}{m}t + \varphi\right) \\ \frac{dv_z}{dt}(t) = D \frac{qB}{m} \cdot \sin\left(-\frac{qB}{m}t + \psi\right) \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}(t=0) = A \frac{qB}{m} \cdot \sin \varphi = -\frac{qB}{m} v_z(t=0) = -\frac{qB}{m} v_0 & (7) \\ \frac{dv_z}{dt}(t=0) = D \frac{qB}{m} \cdot \sin \psi = \frac{qB}{m} v_x(t=0) = 0 & (8) \end{cases}$$

À l'aide de (5), (6), (7) et (8), on obtient : $D = -A = v_0$ $\varphi = \pi/2$ et $\psi = 0$

donc :
$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cdot \sin\left(-\frac{qB}{m}t\right) & (9) \\ v_z(t) = v_0 \cdot \cos\left(-\frac{qB}{m}t\right) & (10) \end{cases}$$

et par intégration :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_0}{qB} \left[\cos\left(-\frac{qB}{m}t\right) - 1 \right] & (11) \\ z(t) = -\frac{mv_0}{qB} \sin\left(-\frac{qB}{m}t\right) & (12) \end{cases}$$

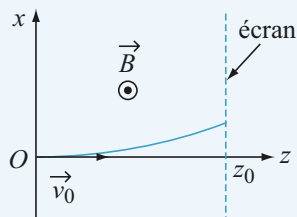
Il est déconseillé de travailler avec les variables x et z : cela ferait apparaître des dérivées 3^e qui compliqueraient inutilement les équations.

On déduit de (11) et (12) que :

$$\left(x - \frac{mv_0}{|q|B} \right)^2 + z^2 = \left(\frac{mv_0}{|q|B} \right)^2 \quad (13)$$

La trajectoire de l'électron est alors un **cercle**

de centre $C\left(\frac{mv_0}{|q|B}; 0; 0\right)$ et rayon :



$$R = \frac{mv_0}{|q|B} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 500\,000}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^{-5}} = 28,4 \text{ cm}$$

→ Réponse D

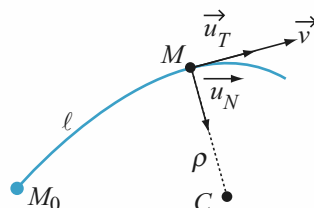
Il y a plus rapide pour déterminer R :

Base de Frénet

Si un point matériel se déplace le long d'une trajectoire $(\mathcal{C})$ imposée (exemple : un coureur cycliste lors d'une étape du Tour de France), la donnée d'une seule coordonnée suffit pour le situer sans équivoque : son **abscisse curviligne** s (USI : m), appelée encore **coordonnée de Frénet**, qui représente la longueur de l'arc $\widehat{M_0M}$, c'est-à-dire la distance parcourue depuis l'origine M_0 de la trajectoire.

Le mouvement d'un tel point peut être décrit à l'aide de la **base de Frénet** $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$, qui est **orthonormée** et ne comporte que **deux vecteurs** :

- le vecteur $\vec{u}_T$ est **tangent** à $(\mathcal{C})$ en M et orienté dans le sens du mouvement ;
- le vecteur $\vec{u}_N$ est **normal** à $(\mathcal{C})$ en M et orienté dans le sens **convexe** $\rightarrow$ **concave** de la courbe.



Dans la base de Frénet :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_T \quad \text{avec} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{et} \quad \vec{a} = a_T \cdot \vec{u}_T + a_N \cdot \vec{u}_N \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} : \text{accélération tangentielle} \\ a_N = \frac{v^2}{R} : \text{accélération normale} \end{cases}$$

R est le **rayon de courbure** de la trajectoire, défini par $\vec{MC} = R \cdot \vec{u}_N$. C est le **centre de courbure**, toujours placé du côté concave de $(\mathcal{C})$.

Ici, l'électron n'est soumis qu'à la force magnétique $\vec{F}_m$. Cette force, toujours orthogonale au vecteur vitesse $\vec{v}$, ne travaille pas. Par conséquent, en vertu du théorème de l'énergie cinétique, la norme de $\vec{v}$ reste constamment égale à v_0 .

Par ailleurs, $\vec{F}_m$ étant orthogonale à la trajectoire :

$$F_m = |q| B v = |q| B v_0$$

Enfin, $\vec{F}_m$ étant orthogonale à la trajectoire, il en est de même, conformément au PFD, du vecteur accélération $\vec{a}$:

$$\left\| \vec{a} \right\| = \left\| \vec{a}_N \right\| = \frac{\left\| \vec{F}_m \right\|}{m} = \frac{|q|Bv_0}{m} = \frac{v_0^2}{R} \quad \text{d'où} \quad R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

Numériquement : $R = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 500\,000}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^5} = 0,284 \text{ m} = 28,4 \text{ cm}.$

• Question 3 : réponse A

L'abscisse x_m de l'électron sur l'écran est obtenue à l'aide de l'équation (13) de la trajectoire circulaire, établie à la question précédente :

$$\left(x - \frac{mv_0}{|q|B} \right)^2 + z^2 = \left(\frac{mv_0}{|q|B} \right)^2 \quad (13)$$

Pour $z = z_0$, $x = x_m$: $\left(x_m - \frac{mv_0}{|q|B} \right)^2 + z_0^2 = \left(\frac{mv_0}{|q|B} \right)^2$

$$x_m = \frac{mv_0}{|q|B} - \sqrt{\left(\frac{mv_0}{|q|B} \right)^2 - z_0^2} = R - \sqrt{R^2 - z_0^2} = 0,284 - \sqrt{0,284^2 - 0,1^2}$$

$$R = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \mathbf{1,8 \text{ cm}}$$

→ Réponse A



La force magnétique étant initialement orientée **dans le sens des x positifs**, les réponses C et D qui proposent une déflexion vers les x négatifs doivent être éliminées.

• Question 4 : réponse B

Si l'électron est en mouvement rectiligne uniforme, son vecteur vitesse est constamment égal à :

$$\vec{v}(t) = v_0 \cdot \vec{e}_z$$

et la force magnétique est constamment égale à :

$$\vec{F}_m(t) = -qBv_0 \cdot \vec{e}_x$$

Par ailleurs, les forces électrique et magnétique se compensent à chaque

instant : $\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$, $\vec{F}_e = -\vec{F}_m$, donc $\left\| \vec{F}_e \right\| = \left\| \vec{F}_m \right\|$, soit $|q|E = |q|Bv_0$

$$B = \frac{E}{v_0} = \frac{10^3}{500\,000} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T} = \mathbf{2 \text{ mT}}$$

→ Réponse B



Si $B < 0$, les deux forces sont orientées dans le sens des x négatifs et ne peuvent pas se compenser. Les réponses C et D doivent donc être éliminées.

• Question 5 : réponse **D**

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = m\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} -qBv_z \\ 0 \\ qBv_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} qE \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}$$

La trajectoire de l'électron étant toujours située dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, on obtient le système d'équations différentielles **couplées** :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB}{m}v_z + \frac{qE}{m} \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{qB}{m}v_x \end{cases} \quad (14)$$

$$(15)$$

Des équations $\frac{d(14)}{dt}$ et (15), il résulte que :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\frac{qB}{m}\frac{dv_z}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2v_x$$

d'où l'équation différentielle du 2nd ordre en v_x :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega_c^2v_x = 0$$

équivalente à une équation différentielle du 3^e ordre en x :

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \omega_c^2\frac{dx}{dt} = 0$$

laquelle s'intègre sous la forme de l'équation différentielle désirée :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_c^2x = a \quad (16)$$

La constante a peut être déterminée par l'étude de l'instant initial :

- $x(t=0) = 0$
- et d'après l'équation (14) :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t=0) = \frac{q}{m}(E - Bv_0)$$

donc :
$$a = \frac{q}{m}(E - Bv_0)$$

→ Réponse **D**

• Question 6 : réponse **B**

Avec $B = \frac{2E}{v_0}$, l'équation différentielle (16) s'écrit en définitive :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_c^2 x = \frac{q}{m}(E - Bv_0) = -\frac{qE}{m}$$

Elle s'intègre en :

$$x(t) = \underbrace{K \cdot \cos(\omega_c t + \chi)}_{\text{solution de l'équation sans second membre}} - \underbrace{\frac{mE}{qB^2}}_{\text{solution particulière}}$$

Les constantes K et χ sont déterminées à l'aide des conditions initiales :

$$x(t=0) = K \cdot \cos \chi - \frac{mE}{qB^2} = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(t=0) = -K\omega_c \cdot \sin \chi = 0$$

soit : $K = \frac{mE}{qB^2}$ et $\chi = 0$.

Finalement :
$$x(t) = \frac{mE}{qB^2} [\cos(\omega_c t) - 1]$$

→ Réponse **B**



Les expressions des réponses A et D, pour lesquelles $x(t=0) \neq 0$, pouvaient immédiatement être invalidées.

→ QCM 3 Pendule en translation

• Question 1 : réponse **D**

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, supposé galiléen, la masse m est soumise à deux forces :

• son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;

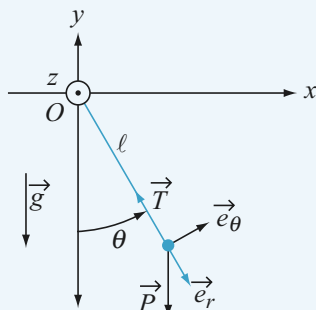
• la tension du fil $\vec{T}$.

Le PFD appliqué à m dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

soit, dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\ell \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



L'équation différentielle recherchée est en 2^e coordonnée, suivant $\vec{e}_\theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

Dans l'approximation des petits mouvements, elle se linéarise en :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

Cette équation différentielle du 2nd ordre sans 2nd membre et sans dérivée 1^{ère} a pour solution :

$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t + \varphi \right)$$

Le mouvement est périodique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ et de période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Donc : $\ell = \frac{g T_0^2}{4\pi^2} = \frac{9,8 \times 1^2}{4 \times (3,14)^2} = 0,248 \text{ m}$

→ Réponse **D**

• Question 2 : réponse A

Accélération d'entraînement du point P

$$\vec{a}_e(P) = \left(\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'P} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P})$$

où $\vec{\omega}$ désigne le **vecteur rotation instantanée** du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Dans ce problème, $\mathcal{R}'$ est en **translation** par rapport à $\mathcal{R}$ (absence de rotation des axes $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$).

$$\text{Donc : } \vec{\omega} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_e(P) = \left(\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{a}_e = a \cdot \vec{e}_x$$

Force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e$$

Dans ce problème, et dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ qui s'applique au point P dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est :

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a} = -ma \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} -ma \cdot \sin \theta \\ -ma \cdot \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le moment $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie})$ par rapport au point O' de la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ qui s'applique au point P dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = \vec{O'P} \wedge \vec{F}_{ie} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -ma \cdot \sin \theta \\ -ma \cdot \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\ell a \cdot \cos \theta \end{pmatrix} = -m\ell a \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_z$$

→ Réponse A

• Question 3 : réponse D

Accélération de Coriolis du point P

$$\vec{a}_c(P) = 2 \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{O'P}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$$

où $\vec{\omega}$ désigne le **vecteur rotation instantanée** du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Dans ce problème, $\mathcal{R}'$ est en **translation** par rapport à $\mathcal{R}$ (absence de rotation des axes $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$).

$$\text{Donc : } \vec{\omega} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_c(P) = \vec{0}.$$

Attention : le fait que la trajectoire du point P dans le référentiel $\mathcal{R}'$ soit un arc de cercle n'a aucune incidence sur la détermination de $\vec{\omega}$, et ne signifie aucunement que le référentiel $\mathcal{R}'$ soit en mouvement de rotation !



Force d'inertie de Coriolis

$$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$$

$$\text{Dans ce problème : } \vec{F}_{ic} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \mathcal{M}_{O'}(\vec{F}_{ic}) = \vec{0}$$

→ Réponse **D**



Le moment d'une force s'exprime en : $[\text{N}].[\text{m}] = [\text{kg}].[\text{m}]^2.[\text{s}]^{-2}$.

- Le résultat de la réponse A s'exprime en : $[\text{kg}].[\text{m}]^3.[\text{s}]^{-2}$.
- Le résultat de la réponse B s'exprime en : $[\text{kg}].[\text{m}]^2.[\text{s}]^{-2}$.
- Le résultat de la réponse C s'exprime en : $[\text{kg}].[\text{m}].[s]^{-1}$.

Les réponses A et C pouvaient donc être éliminées.

• Question 4 : réponse **D**

On conserve dans cette question la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ comme base de travail.

Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, non galiléen, la masse m est soumise à trois forces :

- son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg.\cos\theta \\ -mg.\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

- la tension du fil : $\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = \begin{pmatrix} -ma.\sin\theta \\ -ma.\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ d'après la question 2
- la force d'inertie de Coriolis est **nulle** d'après la question 3.

Les moments par rapport au point O' de ces forces dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sont :

- pour le poids : $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{P}) = \vec{O'P} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} mg.\cos\theta \\ -mg.\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\ell g.\sin\theta \end{pmatrix}$
- pour la tension du fil, **force centrale** : $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{T}) = \vec{O'P} \wedge \vec{T} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- pour la force d'inertie d'entraînement : $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\ell a.\cos\theta \end{pmatrix}$ d'après la question 2.

Enfin, le moment cinétique du point matériel P appliqué en O' dans $\mathcal{R}'$ vaut :

$$\vec{L}_{O'} = O'P \wedge m \left(\frac{d\vec{O'P}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \frac{d\theta}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell^2 \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} = m\ell^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{e}_z$$

Le théorème du moment cinétique appliqué en O' dans $\mathcal{R}'$ au point matériel

P s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F})$$

$$\left[\frac{d}{dt} \left(m\ell^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{e}_z \right) \right]_{\mathcal{R}'} = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie})$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\ell g.\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\ell a.\cos\theta \end{pmatrix}$$

L'équation différentielle demandée est fournie par la 3^e coordonnée :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \cdot \sin\theta - \frac{a}{\ell} \cdot \cos\theta \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$

• Question 5 : réponse A

À l'équilibre du pendule dans $\mathcal{R}$: $\frac{d\theta}{dt} = 0$ donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$.

L'équation différentielle établie à la question précédente se simplifie alors en :

$$g \cdot \sin\theta_0 + a \cdot \cos\theta_0 = 0 \quad \text{soit encore} \quad \tan\theta_0 = -\frac{a}{g}$$

$$\text{et finalement : } \theta_0 = -\arctan\frac{a}{g} \quad \rightarrow \text{Réponse A}$$



- Si $a > 0$, la force d'inertie tire le pendule dans le sens des x négatifs, donc $\theta_0 < 0$. Pour cette raison, les réponses B et C, qui proposent un angle θ_0 , positif, doivent être éliminées.
- Lorsque l'accélération croît, le pendule s'écarte davantage de la verticale, et l'angle θ_0 croît en valeur absolue. La fonction $\arctan\theta$ étant croissante, a doit donc figurer au numérateur dans l'expression de θ_0 . Pour cette raison, la réponse D, qui propose un angle θ_0 où a figure au dénominateur, doit être éliminée.

• Question 6 : réponse B

La difficulté de cette question réside dans la confusion possible entre petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_0 , et petits mouvements autour de la position verticale.



Pour ne pas tomber dans le piège d'écrire les approximations $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$, il convient d'effectuer le changement de variable :

$$u = \theta - \theta_0 \quad \text{soit encore} \quad \theta = \theta_0 + u.$$

Dès lors :

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin(\theta_0 + u) = \sin\theta_0 \cdot \cos u + \cos\theta_0 \cdot \sin u \\ \cos\theta = \cos(\theta_0 + u) = \cos\theta_0 \cdot \cos u - \sin\theta_0 \cdot \sin u \end{cases}$$

Dans l'approximation des petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_0 :

$$u \approx 0 \quad \text{et à l'ordre 1 :} \quad \begin{cases} \sin u \approx u \\ \cos u \approx 1 \end{cases}$$

d'où les expressions approchées de $\sin \theta$ et $\cos \theta$:

$$\begin{cases} \sin \theta \approx \sin \theta_0 + u \cdot \cos \theta_0 = \sin \theta_0 + (\theta - \theta_0) \cdot \cos \theta_0 \\ \cos \theta \approx \cos \theta_0 - u \cdot \sin \theta_0 = \cos \theta_0 - (\theta - \theta_0) \cdot \sin \theta_0 \end{cases}$$

En reportant dans l'équation différentielle de la question 4, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{g}{\ell} [\sin \theta_0 + (\theta - \theta_0) \cdot \cos \theta_0] - \frac{a}{\ell} [\cos \theta_0 - (\theta - \theta_0) \cdot \sin \theta_0] \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{\ell} \cdot \cos \theta_0 - \frac{a}{\ell} \cdot \sin \theta_0 \right) \theta &= -\frac{g}{\ell} [\sin \theta_0 - \theta_0 \cdot \cos \theta_0] - \frac{a}{\ell} [\cos \theta_0 + \theta_0 \cdot \sin \theta_0] \end{aligned}$$

La pulsation s'écrit donc : $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \cdot \cos \theta_0 - \frac{a}{\ell} \cdot \sin \theta_0}$

D'après la question précédente : $\theta_0 = -\arctan \frac{a}{g}$

$$\text{d'où :} \quad \begin{cases} \cos \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2}}} = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \\ \sin \theta_0 = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0} = -\sqrt{1 - \frac{g^2}{a^2 + g^2}} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}} \end{cases}$$



Pour $a > 0$, $\theta_0 < 0$, d'où la présence du signe négatif dans l'expression de $\sin \theta_0$.

En reportant dans l'expression de ω , il vient :

$$\omega = \sqrt{\frac{a^2 + g^2}{\ell \sqrt{a^2 + g^2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{\ell}} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$

→ Réponse **B**



- On peut aisément vérifier que les quatre expressions proposées pour T sont toutes homogènes à un **temps**.
- En revanche, dans le cas particulier où $a = 0$, seules les expressions B, C et D redonnent la valeur de T_0 établie à la question 1 en l'absence de mouvement du référentiel $\mathcal{R}'$, tandis que l'expression A donne la valeur zéro et doit donc être éliminée.

→ QCM 4 Looping

• Question 1 : réponse **A**

Dans le référentiel du sol, supposé galiléen, le mobile est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P}$, force conservative et constante ;
- la réaction du rail $\vec{R}$, normale au déplacement, donc ne travaillant pas.

Tout exercice de dynamique du point nécessite d'aller puiser dans le vivier de ressources suivant :

1. PFD ;
2. théorème du moment cinétique ;
3. théorème de l'énergie cinétique ;
4. théorème de l'énergie mécanique ;

Les expressions 1 et 2 sont vectorielles. Les expressions 3 et 4 sont scalaires et se déclinent sous deux formulations : l'une différentielle, l'autre intégrée.

Le choix de la méthode est conditionné par l'énoncé, ainsi que par la question posée. Dans le cas présent, on cherche à déterminer la norme de la vitesse au point P , ce qui suggère l'emploi d'une expression scalaire faisant intervenir l'énergie cinétique : théorème de l'énergie cinétique ou théorème de l'énergie mécanique. Par ailleurs, la vitesse au point H est connue, ce qui oriente vers une formulation intégrée de ces théorèmes.

Enfin, le fait qu'une des deux forces ne travaille pas, le fait que $\vec{P}$ soit conservative, et le fait que $\vec{P}$ soit constante, sont autant d'indices qui viennent confirmer l'intérêt d'un tel choix dans un souci de simplification des calculs.



Nous opterons pour le théorème de l'énergie cinétique, appliqué au mobile entre les points H et P :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{1}{2}mv_H^2 &= \sum W_{HP}(\vec{F}) = W_{HP}(\vec{P}) + \underbrace{W_{HP}(\vec{R})}_0 \\ \frac{1}{2}mv_p^2 &= \vec{P} \cdot \vec{HP} = \left(-mg \cdot \vec{e}_y \right) \cdot \vec{HP} = -mg(y_p - y_H) \\ &= mg(y_H - y_p) = mg[h - \ell(1 - \cos\theta)]\end{aligned}$$

d'où : $v_p = \sqrt{2g[h - \ell(1 - \cos\theta)]}$ (1)

→ Réponse **A**

Comme nous l'avons signalé, l'emploi du théorème de l'énergie mécanique s'avère tout aussi efficace. La seule force qui travaille, le poids, est conservative, donc l'énergie mécanique est conservée entre H et P :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m(P) &= \mathcal{E}_m(H) \\ \mathcal{E}_c(P) + \mathcal{E}_p(P) &= \mathcal{E}_c(H) + \mathcal{E}_p(H) \\ \frac{1}{2}mv_p^2 + mgy_p &= \frac{1}{2}mv_H^2 + mgy_H \\ \frac{1}{2}mv_p^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) &= mgh\end{aligned}$$

et finalement : $v_p = \sqrt{2g[h - \ell(1 - \cos\theta)]}$.



L'expression de v_p proposée à la réponse D est une fonction **croissante** de θ , ce qui signifie que le mobile accélérerait dans sa phase ascendante. Ce résultat est bien évidemment absurde, et cette réponse devait être éliminée.



• Question 2 : réponse **D**

- Le théorème de l'énergie cinétique et le théorème de l'énergie mécanique font tous deux disparaître la réaction $\vec{R}$, parce qu'elle ne travaille pas.
- Le théorème du moment cinétique appliqué en C fait également disparaître $\vec{R}$, mais pour une autre raison : cette force est centrale.

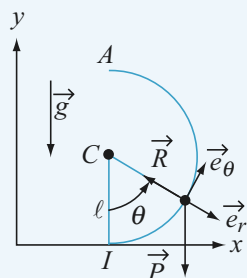
Cette question ne peut donc être résolue qu'à l'aide du PFD, qui restera toujours l'expression la plus porteuse d'information.

Le PFD appliqué au mobile situé au point P , dans le référentiel du sol supposé galiléen, s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

et dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ du plan xOy :

$$\begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -\ell \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{pmatrix}$$



Ne retenons que la composante radiale de cette équation :

$$R = mg \cos \theta + m\ell \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (2)$$

Par ailleurs, dans la même base le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}$

et sa norme vaut : $v = \ell \frac{d\theta}{dt} \quad (3)$

En reportant (1) et (3) dans (2), on obtient l'expression recherchée :

$$R = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{\ell} = mg \cos \theta + \frac{2mg[h - \ell(1 - \cos \theta)]}{\ell}$$

$$R = \frac{mg}{\ell} (2h - 2\ell + 3\ell \cos \theta)$$

→ Réponse **D**



Les fonctions $R(\theta)$ des réponses B et C sont croissantes, ce qui n'est pas conforme au résultat attendu : ces réponses pouvaient être éliminées.

• Question 3 : réponse **A**



Pour atteindre le point A , le mobile doit évidemment être lâché d'une altitude supérieure ou égale à celle de A , qui vaut 2ℓ : cela invalide immédiatement les réponses C et D.

Par ailleurs, la liaison entre le mobile et le rail est unilatérale : cela signifie que le rail n'est pourvu d'aucun dispositif de type mâchoire, permettant de retenir le mobile. Le risque est donc le **décrochement** : le mobile ne parviendra en A que s'il n'a pas décroché avant d'y parvenir.

Condition de non-décrochement

La condition de non-décrochement n'est pas $v \neq 0$ mais :

$$R \neq 0 \quad \text{ou plus exactement ici} \quad R > 0.$$

R étant une fonction décroissante de θ , si $R > 0$ en A , où le risque de décrochement est maximal, on peut être assuré que le mobile n'a pas décroché auparavant.

$$R(A) = R(\pi) = \frac{mg}{\ell}(2h - 5\ell)$$

$$R(A) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad h > h_m = \frac{5\ell}{2}$$

→ Réponse **A**

• Question 4 : réponse **C**

L'expression de la norme R de la réaction exercée par le rail sur le point P a

été établie à la question (2) : $R = \frac{mg}{\ell}(2h - 2\ell + 3\ell \cdot \cos \theta)$

Au point I , où $\theta = 0$, la réaction s'écrit : $R_I = \frac{mg}{\ell}(2h + \ell)$

et, dans les conditions de la question précédente ($h = h_m$) :

$$R_I = 6mg$$

→ Réponse **C**

• Question 5 : réponse **B**

La relation établie à la question 1 donne l'expression de la norme de la vitesse du mobile au point P après avoir été lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur h :

$$v_P = \sqrt{2g[h - \ell(1 - \cos \theta)]}$$

Au point A , où $\theta = \pi$, la norme de la vitesse s'écrit : $v_A = \sqrt{2g(h - 2\ell)}$

et, dans les conditions où $h = h_m = \frac{5\ell}{2}$: $v_A = \sqrt{g\ell}$

→ Réponse **B**



Comme il a été expliqué à la question 3, la vitesse de décrochement est **strictement positive** : la réponse D ne peut donc pas convenir.

La réponse C pouvait également être éliminée : elle correspond à la vitesse acquise à l'issue d'une chute libre de hauteur h . Autrement dit, c'est la vitesse au point I .

• Question 6 : réponse **C**

À l'instant où le mobile quitte le rail au point A , son vecteur vitesse est horizontal et vaut, d'après la question précédente :

$$\vec{v}_A = -\sqrt{g\ell} \cdot \vec{e}_x$$

Le mouvement ultérieur est celui d'une chute libre, avec vitesse initiale, depuis une hauteur 2ℓ .

Le PFD, appliqué lors de la chute au mobile soumis à son seul poids, s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

soit, en projection sur les deux axes Ox et Oy du plan vertical de la trajectoire :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

Après deux intégrations successives par rapport à t , et en choisissant pour nouvelle origine des temps l'instant où le mobile quitte le rail au point A , on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = -\sqrt{g\ell}t + x_c \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2\ell \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire apparaît en substituant t dans les deux équations horaires précédentes :

$$y(x) = -\frac{(x_c - x)^2}{2\ell} + 2\ell$$

La trajectoire est donc une branche de **parabole** convexe de sommet A . Elle coupe l'axe Ox au point d'abscisse x_0 tel que $y = 0$, d'où :

$$x_0 = x_c - 2\ell$$

→ Réponse **C**



- Rappelons que la trajectoire d'une chute libre n'est **verticale** qu'en l'absence de composante horizontale de la vitesse initiale. Dans tous les autres cas, elle est **parabolique**. Ici, $\vec{v}_A \cdot \vec{e}_x \neq 0$, donc la réponse A est impossible.
- Par ailleurs, l'origine du mouvement parabolique étant en A d'abscisse x_C , les expressions B et D, qui ne font pas intervenir x_C , doivent être éliminées.

→ QCM 5 Interaction gravitationnelle

• Question 1 : réponse B

Dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$, galiléen, le PFD appliqué au point matériel A_1 soumis à la seule force gravitationnelle exercée par le point matériel A_2 , s'écrit :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{CA}_1}{dt^2} = - \frac{Gm_1 m_2 A_2 A_1}{\|\vec{A_2 A_1}\|^3} \quad (1)$$

D'après la relation de Chasles : $\vec{A_2 A_1} = \vec{CA_1} - \vec{CA_2} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = \vec{r} = \vec{CA}$ (2)

Par ailleurs, C étant le centre de masse du système des points matériels

$$A_1 \text{ et } A_2 : m_1 \vec{CA_1} + m_2 \vec{CA_2} = m_1 \vec{CA_1} + m_2 (\vec{CA_1} + \vec{A_1 A_2}) = \vec{0}$$

donc :

$$\vec{CA_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{A_2 A_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \vec{CA_1}}{dt^2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (3)$$

En reportant (2) et (3) dans (1), on obtient :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = \vec{F}_g$$

Ce problème à deux corps se réduit donc dans $\mathcal{R}^*$ à l'étude du mouvement d'un point unique *fictif* A, de masse μ et rayon vecteur $\vec{r}$, soumis à $\vec{F}_g$, avec :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$$

→ Réponse B

• Question 2 : réponses **A et D**

Énergie mécanique d'un point matériel

C'est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des travaux des seules forces non conservatives :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} - \mathcal{E}_{m,1} = \sum W_{12}(\vec{F}_{nc})$$

Forces conservatives et forces non conservatives à connaître

Forces conservatives	Forces non conservatives
• poids • force de rappel d'un ressort • force d'interaction gravitationnelle • force d'interaction électrostatique	• force de frottement solide • force de frottement fluide • force exercée par un opérateur

Le point fictif A défini à la question précédente est soumis à la seule force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}_g$, laquelle est toujours conservative. Nous sommes donc dans un cas de conservation de l'énergie mécanique : la réponse A est bonne.



La somme {énergie cinétique + énergie potentielle} est donc conservée, mais l'une comme l'autre varient : les réponses B et C sont fausses.

Par ailleurs, la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ étant **centrale** de centre C , son moment en C est nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_g) = \vec{CA} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$$

En vertu du théorème du moment cinétique appliqué en C dans $\mathcal{R}^*$ au point A :

$$\left\{ \frac{d\vec{L}_C}{dt} \right\}_{\mathcal{R}^*} = \sum \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_g) = \vec{0}$$

Donc, le moment cinétique $\vec{L}_C$ de A en C est conservé : la réponse D est bonne.

→ **Réponses A et D**

• Question 3 : réponse C

En coordonnées polaires (r, φ) :

- l'énergie cinétique du point A s'écrit :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu (v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$$

- l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle de A s'écrit :

$$\mathcal{E}_p = - \frac{Gm_1 m_2}{r}$$

- donc l'énergie mécanique de A s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad \rightarrow \text{Réponse C}$$



L'erreur qui consiste à écrire l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle en $\frac{1}{r^2}$ et non pas en $\frac{1}{r}$ est très fréquente : elle provient d'une confusion avec l'expression de la force d'interaction gravitationnelle qui lui est associée.



Les réponses A et D sont donc fausses.

La dérivée seconde de φ ne peut pas apparaître dans l'expression de l'énergie cinétique, laquelle s'écrit en fonction de la vitesse et non de l'accélération : les réponses B et D sont fausses.

• Question 4 : réponse C

L'expression de l'énergie cinétique a été établie à la question précédente :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$$

Or :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\text{d'où : } \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{\mu r^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right] \quad (4)$$

Par ailleurs, le moment cinétique de A en C s'écrit :

$$\vec{L}_C = \vec{CA} \wedge \mu \vec{v} = r \cdot \vec{e}_x \wedge \mu \left(\frac{dr}{dt} \cdot \vec{e}_x + r \frac{d\phi}{dt} \cdot \vec{e}_\phi \right) = \mu r^2 \frac{d\phi}{dt} \cdot \vec{e}_z$$

et sa composante sur l'axe Cz vaut : $\vec{L}_z = \vec{L}_C \cdot \vec{e}_z = \mu r^2 \frac{d\phi}{dt}$ (5)

En reportant (5) dans (4), on obtient :

$$\mathcal{E}_c = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \right] \quad \rightarrow \text{Réponse C}$$



• La dérivée seconde $\frac{d^2r}{d\phi^2}$ ne peut pas apparaître dans l'expression de l'énergie cinétique, laquelle s'écrit en fonction de la vitesse et non de l'accélération : les réponses A et B sont fausses.

• Il y a une seconde raison d'exclure la réponse B : l'expression entre parenthèses n'est pas homogène. Sommer le nombre 1, sans dimension, et le terme $\frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\phi^2}$, qui s'exprime en $[m]^{-1}$, n'a pas de sens.

• Dans les expressions A, C et D, les termes entre parenthèses ou entre crochets sont sans dimension. Examinons les facteurs qui les précèdent :

$$\bullet \frac{L_z^2}{2\mu r^2} \equiv \frac{[kg \cdot m^2 s^{-1}]^2}{[kg] \cdot [m]^2} = \underbrace{[kg \cdot m \cdot s^{-2}]}_{[N]} \cdot [m] = [N] \cdot [m] = [J] : \text{l'expression C est}$$

homogène à une énergie.

$$\bullet \frac{\mu L_z^2}{2r^2} \equiv \frac{[kg] \cdot [kg \cdot m^2 s^{-1}]^2}{[m]^2} = [kg]^2 \cdot [J] : \text{les expressions A et D ne sont pas}$$

homogènes à une énergie. Les réponses A et D sont donc fausses.

• Question 5 : réponse B

En utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ équivalent à $r = \frac{1}{u}$, on peut écrire :

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}$$

soit, en reportant dans l'expression de l'énergie cinétique obtenue à la question précédente :

$$\mathcal{E}_c = \frac{L_z^2 u^2}{2\mu} \left[1 + \frac{1}{u^2} \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 \right] = \frac{L_z^2}{2\mu} \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 \right]$$

L'énergie mécanique peut alors s'exprimer en fonction de la variable u :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{L_z^2}{2\mu} \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 \right] - Gm_1 m_2 u$$

L'énergie mécanique étant conservée :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 &= \frac{L_z^2}{2\mu} \left[2u \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} + 2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2 u}{d\phi^2} \frac{d\phi}{dt} \right] - Gm_1 m_2 \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \\ \frac{L_z^2}{\mu} \left[u + \frac{d^2 u}{d\phi^2} \right] - Gm_1 m_2 &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'équation différentielle recherchée : $\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{Gm_1 m_2}{L_z^2} = \frac{1}{p}$

$$\text{Finalement : } p = \frac{L_z^2}{\mu Gm_1 m_2}$$

→ Réponse B

• Question 6 : réponse A

La vitesse de libération est la vitesse qui confère à la sonde une **énergie mécanique nulle**, lui permettant d'atteindre l'infini avec une vitesse nulle :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mu v_l^2 - \frac{Gm_1 m_2}{R_T + h} = 0$$

$$\text{d'où : } v_l = \sqrt{\frac{2Gm_1 m_2}{\mu(R_T + h)}} \approx \sqrt{\frac{2Gm_1 m_2}{m_1(R_T + h)}} = \sqrt{\frac{2Gm_2}{R_T + h}}$$

$$v_l = \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24}}{6\,870\,000}} = 10\,800 \text{ m.s}^{-1} = \mathbf{10,8 \text{ km.s}^{-1}}$$

→ Réponse **A**



À l'évidence, l'ordre de grandeur des réponses B, C et D ne convient pas.

→ QCM 6 Satellite

• Question 1 : réponse **A**

Le satellite n'est soumis qu'à la force gravitationnelle $\vec{F}_g$, force **centrale** de centre T , dont le moment en T est nul.

En vertu du théorème du moment cinétique appliqué en T dans $\mathcal{R}_G$ au satellite :

$$\left(\frac{d\vec{L}_T}{dt} \right)_{\mathcal{R}_G} = \sum \vec{\mathcal{M}}_T(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_T(\vec{F}_g) = \vec{0}$$

Donc, le moment cinétique $\vec{L}_T$ du satellite en T est conservé, ce qui signifie que la trajectoire du satellite est inscrite dans un **plan contenant le centre T de la Terre**, le rayon vecteur et $\vec{F}_g$.

→ Réponse **A**

• Question 2 : réponse **C**

L'orbite du satellite étant **circulaire**, la force $\vec{F}_g$ est **normale** au déplacement. En vertu du PFD, l'accélération est donc également **normale**, et vaut $\frac{v_0^2}{\rho}$, où ρ désigne le **rayon de courbure** de la trajectoire, égal ici au rayon de

l'orbite circulaire. Le PFD s'écrit donc scalairement :

$$F_g = \frac{GmM}{(R+h)^2} = m \frac{v_0^2}{R+h} \quad \text{d'où} \quad v_0 = \sqrt{\frac{MG}{R+h}} \quad \rightarrow \text{Réponse } \mathbf{C}$$

• Question 3 : réponse **D**

Sur son orbite, le satellite garde une vitesse **constante**, égale à : $v_0 = \sqrt{\frac{MG}{R+h}}$.

Pendant une période de révolution T_0 , il parcourt la distance $d = 2\pi(R+h)$, d'où :

$$v_0 = \frac{2\pi(R+h)}{T_0}, \text{ soit } T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{MG}}$$

→ Réponse **D**

• Question 4 : réponse **B**

L'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mt}} = \mathcal{E}_{\text{ct}} + \mathcal{E}_{\text{pt}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R+h} = \frac{mMG}{2(R+h)} - \frac{mMG}{R+h} = -\frac{mMG}{2(R+h)}$$

→ Réponse **B**



Le satellite est engagé dans une **trajectoire fermée**. Il est donc **lié à la Terre**, et son énergie mécanique est strictement **négative** : les réponses A et C sont donc impossibles.

• Question 5 : réponse **C**

Au sol, le satellite décrit autour de l'axe des pôles un cercle de rayon $r = R \cdot \cos \lambda$, à la vitesse angulaire Ω , et à la vitesse : $v_s = r\Omega = R\Omega \cdot \cos \lambda$. Son énergie mécanique vaut donc :

$$\mathcal{E}_{\text{ms}} = \mathcal{E}_{\text{cs}} + \mathcal{E}_{\text{ps}} = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{mMG}{R} = -\frac{mMG}{R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \cdot \cos^2 \lambda$$

→ Réponse **C**

• Question 6 : réponse **D**

$$\mathcal{E}_{\text{sat}} = \mathcal{E}_{\text{mt}} - \mathcal{E}_{\text{ms}} = -\frac{mMG}{2(R+h)} - \left(-\frac{mMG}{R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \cdot \cos^2 \lambda \right)$$

$$\mathcal{E}_{\text{sat}} = m \left[MG \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)} \right) - \frac{R^2\Omega^2}{2} \cdot \cos^2 \lambda \right]$$

$$\mathcal{E}_{\text{sat}} = m \left[\frac{MG(R+h)+h}{2R(R+h)} - \frac{R^2\Omega^2}{2} \cdot \cos^2 \lambda \right]$$

$$\mathcal{E}_{\text{sat}} = m \left[\frac{MG}{2R} \left(1 + \frac{h}{(R+h)} \right) - \frac{R^2\Omega^2}{2} \cdot \cos^2 \lambda \right]$$

→ Réponse **D**

chapitre 4

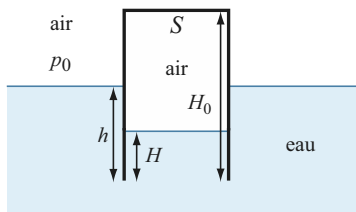
Thermodynamique

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Immersion d'une cloche	140	153
• QCM 2 : Détentes d'un gaz parfait	142	157
• QCM 3 : Détente dans le vide	143	162
• QCM 4 : Mélange de deux gaz	146	167
• QCM 5 : Cycle Diesel	148	171
• QCM 6 : Cycle de Carnot	150	175

→ QCM 1 Immersion d'une cloche

• Question 1

Une cloche cylindrique de masse m , dont l'épaisseur des parois est négligeable, est renversée puis plongée verticalement dans une cuve remplie d'eau. On désigne respectivement par S et H_0 la section et la hauteur du cylindre, par ρ la masse volumique de l'eau et par p_0 la pression atmosphérique extérieure. La cloche s'enfonce dans le liquide en emprisonnant un volume d'air initial égal à son volume intérieur (cf. figure ci-dessous). La répartition de la masse de la cloche est telle que, dans son état d'équilibre final, elle flotte en restant verticale.



On négligera la masse volumique de l'air devant celle de l'eau et l'on supposera que la pression de l'air (que l'on assimilera à un gaz parfait) à l'intérieur du récipient est uniforme.

Exprimer la hauteur h de la partie immergée du récipient.

A $h = \frac{mg}{mg + p_0 S} H_0$

B $h = \frac{m}{\rho S} + \frac{mg}{mg + p_0 S} H_0$

C $h = H_0 - \frac{m}{\rho S}$

D $h = \frac{mg + p_0 S}{mg} H_0 - \frac{m}{\rho S}$

• Question 2

Exprimer le volume V_1 de l'air emprisonné dans la cloche.

A $V_1 = \frac{p_0 S^2}{mg + p_0 S} H_0$

B $V_1 = \frac{mg + p_0 S}{p_0 S^2} H_0$

C $V_1 = \frac{p_0 S^2}{mg} H_0$

D $V_1 = \frac{mg}{p_0 S^2} H_0$

• Question 3

Calculer la pression p_1 de l'air dans la cloche.

A $p_1 = p_0 + \rho gh$

B $p_1 = p_0 + \rho gH_0$

C $p_1 = \rho g(H_0 - h)$

D $p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$

• Question 4

Une vanne située dans la partie supérieure de la cloche permet d'évacuer une quantité d'air suffisante pour que la cloche s'enfonce jusqu'à ce que la base du cylindre affleure juste la surface de l'eau dans la cuve. Calculer la pression p_2 de l'air dans la cloche.

A $p_2 = p_0 + \rho gH_0$

B $p_2 = p_0 + \frac{mg}{S}$

C $p_2 = p_0 + 2\rho gH_0$

D $p_2 = \frac{mg}{S}$

• Question 5

Calculer le volume V_2 de l'air dans la cloche.

A $V_2 = \frac{m}{\rho}$

B $V_2 = \frac{2m}{\rho}$

C $V_2 = \frac{p_0 S^2}{mg} H_0$

D $V_2 = \frac{mg + p_0 S}{p_0 S^2} H_0$

• Question 6

La cloche vide est maintenant déposée à l'endroit sur l'eau et elle est remplie d'un liquide de masse volumique $\rho_0 > \rho$. Quel est le volume maximal V_M de liquide que l'on peut mettre dans la cloche avant qu'elle coule ?

A $V_M = \frac{\rho_0 SH_0 - m}{\rho}$

B $V_M = \frac{\rho_0}{\rho} SH_0$

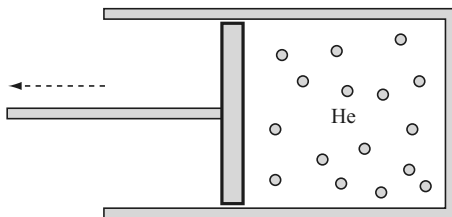
C $V_M = \frac{\rho SH_0 - m}{\rho_0}$

D $V_M = \frac{\rho}{\rho_0} SH_0$

→ QCM 2 Détentes d'un gaz parfait

• Question 1

Une enceinte cylindrique fermée par un piston, mobile sans frottement (figure ci-dessous), contient 500 g d'hélium gazeux, monoatomique, de masse molaire $M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$. Dans l'état (1) initial, le volume de l'enceinte est $V_1 = 100 \text{ L}$, et le gaz, supposé parfait, est à la température $T_1 = 600 \text{ K}$. On rappelle que l'énergie interne de n moles de gaz parfait monoatomique à la température T s'écrit $U = \frac{3}{2}nRT$ où $R \approx 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ désigne la constante des gaz parfaits.



Calculer la capacité thermique massique à volume constant c_v de l'hélium.

- | | |
|--|--|
| A $c_v = 1,38 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ | B $c_v = 2,91 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ |
| C $c_v = 3,12 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ | D $c_v = 5,19 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ |

• Question 2

Par déplacement du piston, le gaz subit une détente isotherme, supposée réversible, qui le conduit à l'état (2) caractérisé par un volume $V_2 = 250 \text{ L}$. Calculer la pression p_2 du gaz dans l'état (2).

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| A $p_2 = 2,49.10^6 \text{ Pa}$ | B $p_2 = 2,49.10^3 \text{ Pa}$ |
| C $p_2 = 9,97.10^6 \text{ Pa}$ | D $p_2 = 9,97.10^3 \text{ Pa}$ |

• Question 3

Quel est le travail $W_{1,2}$ reçu par le gaz au cours de cette évolution isotherme ?

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| A $W_{1,2} = -2280 \text{ kJ}$ | B $W_{1,2} = -571 \text{ kJ}$ |
| C $W_{1,2} = 571 \text{ kJ}$ | D $W_{1,2} = 2280 \text{ kJ}$ |

• Question 4

On envisage une nouvelle évolution réversible, constituée d'une détente adiabatique entre l'état (1) et un état intermédiaire (3) de volume $V_3 = V_2$, suivie d'un chauffage isochore entre l'état (3) et l'état final (2), défini précédemment. Déterminer la température T_3 de l'état intermédiaire.

A $T_3 = 326 \text{ K}$

B $T_3 = 416 \text{ K}$

C $T_3 = 866 \text{ K}$

D $T_3 = 1\,105 \text{ K}$

• Question 5

Calculer le travail $W_{1,3,2}$ reçu par le gaz au cours des évolutions successives (1) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (2).

A $W_{1,3,2} = -287 \text{ kJ}$

B $W_{1,3,2} = -427 \text{ kJ}$

C $W_{1,3,2} = 414 \text{ kJ}$

D $W_{1,3,2} = 787 \text{ kJ}$

• Question 6

Déterminer la variation d'entropie ΔS du gaz entre l'état (1) et l'état (2) :

A $\Delta S = -3\,807 \text{ J.K}^{-1}$

B $\Delta S = -952 \text{ J.K}^{-1}$

C $\Delta S = 952 \text{ J.K}^{-1}$

D $\Delta S = 0 \text{ J.K}^{-1}$

→ QCM 3 Détente dans le vide

• Question 1

n moles d'un gaz parfait évoluent d'un état initial p_i, V_i, T_i vers un état final p_f, V_f, T_f . On désigne par $\gamma = c_p / c_v$ le rapport des capacités thermiques molaires respectivement à pression et à volume constants. Exprimer la variation ΔU de son énergie interne.

A $\Delta U = \frac{p_i V_i - p_f V_f}{n\gamma}$

B $\Delta U = 0$

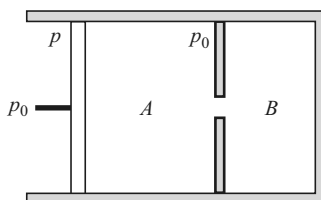
C $\Delta U = \frac{p_f V_f - p_i V_i}{nR}$

D $\Delta U = \frac{p_f V_f - p_i V_i}{\gamma - 1}$

• Question 2

Un récipient cylindrique horizontal muni d'un piston mobile p qui peut coulisser sans frottement le long du cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe p_0 . L'ensemble constitué par le cylindre, le piston et les parois est adiabatique. Sur la face externe du piston s'exerce la pression atmosphérique p_0 que l'on suppose uniforme et constante.

Dans la situation initiale, le compartiment A de volume V_A contient n moles d'un gaz parfait à la pression p_0 , le compartiment B , de volume V_B , est vide (pression négligeable).



On perce dans la paroi fixe p_0 un orifice suffisamment petit pour que le piston se déplace infiniment lentement. On suppose, dans un premier temps, que V_B est suffisamment petit pour que dans l'état d'équilibre final le piston n'arrive pas en butée sur p_0 . Calculer le volume ΔV balayé par le piston lors de l'évolution du gaz vers l'état d'équilibre final caractérisé par le volume final V_{f1} de l'ensemble des deux compartiments.

A $\Delta V = V_A + V_B - V_{f1}$

B $\Delta V = V_{f1} - V_A + V_B$

C $\Delta V = V_{f1} + V_A - V_B$

D $\Delta V = V_{f1} - V_B$

• Question 3

Calculer, en appliquant le premier principe de la thermodynamique, le volume final V_{f1} du gaz.

A $V_{f1} = V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma} V_B$

B $V_{f1} = V_B + \frac{\gamma-1}{\gamma} V_A$

C $V_{f1} = V_B + \frac{\gamma}{\gamma-1} V_A$

D $V_{f1} = \gamma V_A + \frac{V_B}{\gamma-1}$

• Question 4

Calculer la température finale T_{f1} du gaz.

A $T_{f1} = \frac{p_0}{nR} \left(V_B + \frac{\gamma-1}{\gamma} V_A \right)$

B $T_{f1} = \frac{p_0}{nR} \left(V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma} V_B \right)$

C $T_{f1} = \frac{p_0}{nR} \left(V_B + \frac{\gamma}{\gamma-1} V_A \right)$

D $T_{f1} = \frac{p_0}{nR} \left(\gamma V_A + \frac{V_B}{\gamma-1} \right)$

• Question 5

Calculer la variation d'entropie ΔS_1 du gaz.

A $\Delta S_1 = n\gamma R \ln \left[1 + \frac{(\gamma-1)V_B}{\gamma V_A} \right]$

B $\Delta S_1 = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} \ln \left[1 + \frac{(\gamma-1)V_B}{\gamma V_A} \right]$

C $\Delta S_1 = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} \ln \left[1 + \frac{\gamma V_A}{(\gamma-1)V_B} \right]$

D $\Delta S_1 = \frac{nR}{\gamma} \ln \left[1 + \frac{\gamma V_A}{(\gamma-1)V_B} \right]$

• Question 6

On suppose maintenant que V_B est suffisamment grand pour que dans l'état d'équilibre final le piston soit en butée sur p_0 . Calculer la pression finale p_{f2} du gaz.

A $p_{f2} = \gamma p_0 \frac{V_B}{V_A}$

B $p_{f2} = (\gamma-1)p_0 \frac{V_A}{V_B}$

C $p_{f2} = \frac{p_0}{\gamma} \frac{V_B}{V_A}$

D $p_{f2} = \gamma p_0 \frac{V_A}{V_B}$

• Question 7

Calculer la température finale T_{f2} du gaz.

A $T_{f2} = \frac{\gamma p_0 V_A}{nR}$

B $T_{f2} = \frac{(\gamma-1)p_0 V_A}{nR}$

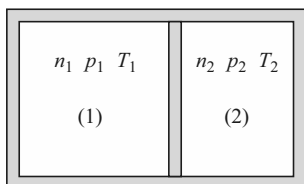
C $T_{f2} = \frac{p_0 V_A}{n\gamma R}$

D $T_{f2} = \frac{p_0 V_B}{n(\gamma-1)R}$

→ QCM 4 Mélange de deux gaz

• Question 1

Un récipient à parois adiabatiques est séparé en deux compartiments par une paroi adiabatique. Dans l'état d'équilibre initial, chaque compartiment contient un gaz parfait diatomique dont on notera respectivement c_p et c_v les capacités thermiques molaires à pression et à volume constants, la constante des gaz parfaits étant notée R . On désigne respectivement par n_1 , p_1 , T_1 et n_2 , p_2 , T_2 le nombre de moles, la pression et la température des gaz contenus dans les compartiments (1) et (2) (figure ci-dessous).



La paroi séparant les deux compartiments est supprimée. Calculer la température finale T_f du mélange des deux gaz à l'équilibre. On supposera que le mélange des deux gaz se comporte également comme un gaz parfait.

A $T_f = \frac{T_1 + T_2}{n_1 + n_2}$

B $T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{2}$

C $T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$

D $T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$

• Question 2

Exprimer la pression finale p_f du mélange.

A $p_f = p_1 p_2 \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 T_1 p_1 + n_2 T_2 p_2}$

B $p_f = p_1 p_2 \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{T_1 p_2 + T_2 p_1}$

C $p_f = p_1 p_2 \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{T_1 p_1 + T_2 p_2}$

D $p_f = p_1 p_2 \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 T_1 p_2 + n_2 T_2 p_1}$

• Question 3

Exprimer les pressions finales p_{f1} et p_{f2} de chacun des gaz dans le mélange en fonction de p_f , n_1 et n_2 .

A $p_{f1} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} p_f$ et $p_{f2} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} p_f$

B $p_{f1} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} p_f$ et $p_{f2} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} p_f$

C $p_{f1} = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} p_f$ et $p_{f2} = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} p_f$

D $p_{f1} = p_f$ et $p_{f2} = p_f$

• Question 4

Calculer la variation d'entropie $\Delta S_{(1)}$ du système constitué par l'ensemble des deux gaz parfaits en fonction de p_1 , p_2 , p_f , T_1 , T_2 et T_f lorsque $n_1 = n_2 = 1$.

A $\Delta S_{(1)} = c_p \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} + R \ln \frac{p_1 p_2}{p_f^2} + 2R \ln 2$

B $\Delta S_{(1)} = c_p \ln \frac{T_1 T_2}{T_f^2} + R \ln \frac{p_f^2}{p_1 p_2} + 2R \ln 2$

C $\Delta S_{(1)} = c_p \ln \frac{T_1 T_2}{T_f^2} + R \ln \frac{p_1 p_2}{p_f^2} - 2R \ln 2$

D $\Delta S_{(1)} = c_p \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} + R \ln \frac{p_1 p_2}{p_f^2}$

• Question 5

Calculer la variation d'entropie $\Delta S_{(2)}$ du système constitué par l'ensemble des deux gaz parfaits lorsque $T_1 = T_2 = T_0$, $p_1 = p_2 = p_0$ et $n_1 = n_2 = 1$.

A $\Delta S_{(2)} = 0$

B $\Delta S_{(2)} = -2R \ln 2$

C $\Delta S_{(2)} = 2R \ln 4$

D $\Delta S_{(2)} = 2R \ln 2$

• Question 6

Calculer la variation d'entropie $\Delta S_{(3)}$ du système constitué par l'ensemble des deux gaz parfaits lorsque $T_1 = T_2 = T_0$ et $p_1 = p_2 = p_0$, et lorsque les molécules qui remplissent chaque compartiment sont identiques.

A $\Delta S_{(3)} = 2R \ln 2$

B $\Delta S_{(3)} = 0$

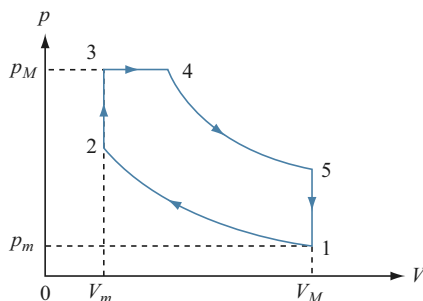
C $\Delta S_{(3)} = -2R \ln 2$

D $\Delta S_{(3)} = 2R \ln 4$

→ QCM 5 Cycle Diesel

• Question 1

Dans les moteurs Diesel à double combustion, le cycle décrit par l'air est celui représenté en coordonnées de Clapeyron (p , V) par le diagramme de la figure ci-dessous. Après la phase d'admission qui amène l'air au point 1 du cycle, celui-ci subit une compression adiabatique réversible jusqu'au point 2. Après injection du carburant en 2, la combustion s'effectue d'abord de façon isochore de 2 à 3 puis se poursuit de façon isobare de 3 à 4. La phase de combustion est suivie d'une détente adiabatique réversible de 4 à 5 puis d'une phase d'échappement isochore de 5 à 1. Au point 1 du cycle, la pression $p_m = 1$ bar et la température $T_m = 293$ K sont minimales. La pression maximale (aux points 3 et 4) est $p_M = 60$ bars et la température maximale (au point 4) est $T_M = 2073$ K.



On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique et on notera respectivement c_p et c_v ses capacités thermiques molaires à pression et à volume constants.

On donne :

- le rapport volumétrique de compression : $\beta_v = \frac{V_M}{V_m} = 17$
- la masse molaire de l'air : $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$
- la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
- $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$.

Calculer la température T_2 au point 2 du cycle.

A $T_2 = 910 \text{ K}$

B $T_2 = 1\,325 \text{ K}$

C $T_2 = 574 \text{ K}$

D $T_2 = 1\,591 \text{ K}$

• Question 2

Calculer la température T_3 au point 3 du cycle.

A $T_3 = 798 \text{ K}$

B $T_3 = 1\,411 \text{ K}$

C $T_3 = 1\,034 \text{ K}$

D $T_3 = 1\,201 \text{ K}$

• Question 3

Calculer la température T_5 au point 5 du cycle.

A $T_5 = 712 \text{ K}$

B $T_5 = 1\,005 \text{ K}$

C $T_5 = 478 \text{ K}$

D $T_5 = 882 \text{ K}$

• Question 4

Quelle est, en kJ.kg^{-1} , la quantité de chaleur Q_c reçue par un kg d'air au cours de la phase de combustion entre les points 2 et 4 ?

A $Q_c = 945 \text{ kJ.kg}^{-1}$

B $Q_c = 1\,131 \text{ kJ.kg}^{-1}$

C $Q_c = 1\,531 \text{ kJ.kg}^{-1}$

D $Q_c = 1\,943 \text{ kJ.kg}^{-1}$

• Question 5

Quelle est, en kJ.kg^{-1} , la quantité de chaleur Q_f échangée avec le milieu extérieur par un kg d'air entre les points 5 et 1 ?

A $Q_f = -292 \text{ kJ.kg}^{-1}$

B $Q_f = -768 \text{ kJ.kg}^{-1}$

C $Q_f = -422 \text{ kJ.kg}^{-1}$

D $Q_f = -1\,106 \text{ kJ.kg}^{-1}$

• Question 6

En déduire, en kJ.kg^{-1} , le travail W échangé avec le milieu extérieur par un kg d'air au cours d'un cycle.

A $W = -709 \text{ kJ.kg}^{-1}$

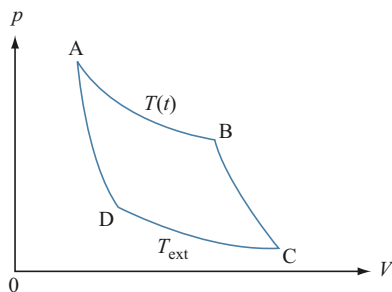
B $W = -267 \text{ kJ.kg}^{-1}$

C $W = -329 \text{ kJ.kg}^{-1}$

D $W = -1\,283 \text{ kJ.kg}^{-1}$

→ QCM 6 Cycle de Carnot

Le fluide d'une pompe à chaleur décrit de façon réversible un cycle de Carnot constitué de deux évolutions adiabatiques AD et BC et de deux évolutions isothermes AB et DC (cf. le diagramme p (pression), V (volume) représenté sur la figure ci-dessous).



Au cours de chaque évolution isotherme AB, le système échange la quantité de chaleur δQ_c avec une source chaude constituée par l'air ambiant d'une pièce de capacité thermique totale C que l'on désire *chauffer*. La température de la pièce à l'instant t est notée $T(t)$.

Au cours de chaque évolution isotherme DC, le système échange la quantité de chaleur δQ_f avec une source froide constituée par l'air extérieur à la pièce dont la température *constante* est notée T_{ext} .

On peut considérer que la température $T(t)$ de la source chaude reste constante au cours d'un cycle (de durée dt) et qu'elle augmente de dT à chaque cycle. On désigne par $\mathcal{P}$ la puissance mécanique totale *constante* fournie au système.

• Question 1

Pour que la machine fonctionne en pompe à chaleur qui réchauffe la pièce,

- A** il faut que le cycle soit décrit dans le sens ADCBA.
- B** il faut que le cycle soit décrit dans le sens ABCDA.
- C** le sens du cycle n'a pas d'importance.
- D** on doit nécessairement avoir : $T(0) > T_{ext}$.

• Question 2

L'efficacité thermique $\eta(t)$ de la pompe est définie par le rapport $\eta = -\frac{\delta Q_c}{\delta W}$, où δW est le travail total échangé au cours d'un cycle. Exprimer $\eta(t)$.

A $\eta(t) = \frac{T_{ext}}{T(t) - T_{ext}}$

B $\eta(t) = \frac{T(t)}{T_{ext}}$

C $\eta(t) = \frac{T(t) - T_{ext}}{T(t)}$

D $\eta(t) = \frac{T(t)}{T(t) - T_{ext}}$

• Question 3

On suppose, dans un premier temps, que la pièce est thermiquement isolée de l'extérieur et que sa température initiale est $T(0) = T_0 > T_{ext}$. Calculer l'intervalle de temps t_1 pendant lequel la pompe à chaleur doit fonctionner, à puissance mécanique constante, pour que la température de la pièce atteigne la valeur $T_1 > T_0$.

A $t_1 = \frac{C}{\mathcal{P}} T_{ext} \ln \frac{T_1}{T_0}$

B $t_1 = \frac{C}{\mathcal{P}} \left(T_1 - T_0 - T_{ext} \ln \frac{T_1}{T_0} \right)$

C $t_1 = \frac{C}{\mathcal{P}} \left(T_1 - T_0 \ln \frac{T_{ext}}{T_1} \right)$

D $t_1 = \frac{C}{\mathcal{P}} \left(T_0 - T_1 \ln \frac{T_{ext}}{T_0} \right)$

• Question 4

On suppose maintenant que la puissance $\mathcal{P}$ est directement fournie à une résistance chauffante de capacité thermique négligeable et que la pièce est initialement à la température T_0 . Calculer l'intervalle de temps t_2 au bout duquel la température de la pièce atteint la valeur T_1 .

A $t_2 = \frac{C(T_1 - T_0)^2}{\mathcal{P}(T_1 + T_0)}$

B $t_2 = \frac{C(T_1 + T_0)}{\mathcal{P} \cdot 2}$

C $t_2 = \frac{C(T_1 - T_0)}{\mathcal{P} \cdot 2}$

D $t_2 = \frac{C}{\mathcal{P}}(T_1 - T_0)$

• Question 5

On suppose maintenant que la pièce présente une fuite thermique. Lorsque sa température est $T(t)$, elle échange avec l'extérieur, pendant l'intervalle de temps dt , une quantité de chaleur $\delta Q = -kC[T(t) - T_{\text{ext}}]dt$ où k est une constante.

La pompe est arrêtée lorsque la température de la pièce vaut 295 K alors que $T_{\text{ext}} = 290$ K. On constate qu'au bout de 3 heures la température de la pièce a chuté de 3°C. Calculer la valeur de k .

A $k = 17,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

B $k = 32,4 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

C $k = 84,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$

D $k = 46,8 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$

• Question 6

Montrer que la température maximale T_{max} qu'il est possible d'obtenir dans la pièce en présence de la fuite thermique lorsque la pompe fonctionne et que le régime permanent est établi se déduit de la relation :

A $T_{\text{max}}^2 - 2\left(T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}}{2kC}\right)T_{\text{max}} + T_{\text{ext}}^2 = 0$

B $T_{\text{ext}}^2 - \left(T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}}{kC}\right)T_{\text{max}} = 0$

C $T_{\text{max}}^2 - \left(T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}}{kC}\right)T_{\text{ext}} = 0$

D $\left(2T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}}{kC}\right)^2 T_{\text{max}} - T_{\text{ext}}^3 = 0$

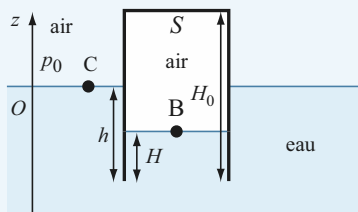
→ QCM 1 Immersion d'une cloche

• Question 1 : réponse B

Résoudre cette question nécessite d'avoir recours successivement au théorème d'Archimède, au PFD, à la loi des gaz parfaits et à celle de la statique des fluides.

La définition du système est une étape cruciale du raisonnement. Nous choisirons comme système {cloche + air emprisonné dans la cloche}. Il est possible de faire un autre choix : {cloche + air + eau dans la cloche}. Le choix conditionne l'écriture de la poussée d'Archimède et du PFD, sans pour autant affecter le résultat final qui demeure inchangé.

Nous travaillerons avec un axe vertical ascendant Oz , d'origine O située à la surface de l'eau dans la cuve.



- En vertu du **théorème d'Archimède**, le système, **immergé** dans un ensemble de fluides en équilibre (air + eau), est soumis de leur part à des forces de pression dont la résultante $\vec{\Pi}_A$, appelée **poussée d'Archimède**, est égale et opposée au poids des fluides déplacés. La masse volumique de l'air étant négligeable devant celle de l'eau, on néglige la poussée d'Archimède due à l'air :

$$\vec{\Pi}_A = -\rho(h-H)S \cdot \vec{g} - \underbrace{\rho_{\text{air}}}_{=0}(H_0-h)S \cdot \vec{g} = \rho(h-H)Sg\vec{e}_z$$

- Les forces qui s'appliquent au système sont le poids et la poussée d'Archimède. Le **principe fondamental de la dynamique** appliqué au système en équilibre dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{\Pi}_A &= \vec{0} \\ m\vec{g} + \rho(h-H)Sg\vec{e}_z &= \vec{0} \end{aligned}$$

et, en projection sur l'axe Oz : $-mg + \rho(h-H)Sg = 0$

$$H = h - \frac{m}{\rho S} \quad (1)$$



- L'air emprisonné dans la cloche, supposé parfait, subit une compression **isotherme**. La **loi des gaz parfaits**, appliquée successivement aux états initial et final, s'écrit :

$$\begin{aligned} p_0 V_0 &= p_1 V_1 \\ p_0 H_0 S &= p_1 (H_0 - H) S \\ p_1 &= \frac{p_0 H_0}{H_0 - H} \end{aligned} \quad (2)$$

- L'équation locale de la statique des fluides $\vec{\text{grad}} p = \rho \vec{g}$ s'écrit en projection sur l'axe Oz : $dp = -\rho g dz$

La masse volumique de l'eau, liquide **incompressible**, est uniforme. En intégrant l'équation différentielle précédente entre un point C où la pression, égale à celle de l'atmosphère extérieure, vaut p_0 , et un point B où la pression, égale à celle de l'air emprisonné, vaut p_1 (cf. figure plus haut), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p_1} dp &= -\rho g \int_0^{(h-H)} dz \\ p_1 &= p_0 + \rho g (h - H) \end{aligned} \quad (3)$$

Substituons l'expression (1) de H dans les expressions (2) et (3) de p_1 :

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= \frac{p_0 H_0}{H_0 - h + \frac{m}{\rho S}} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= p_0 + \frac{mg}{S} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

En égalisant (4) et (5), il vient finalement :

$$h = \frac{m}{\rho S} + \frac{mg}{mg + p_0 S} H_0 \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$

Dans ce type d'exercice, il est conseillé de vérifier, dès qu'elle est écrite, l'homogénéité de chaque ligne de calcul.



• Question 2 : réponse A

Le volume V_1 s'écrit : $V_1 = (H_0 - H)S$

Substituons H en utilisant la relation (1) : $V_1 = \left(H_0 - h + \frac{m}{\rho S} \right) S$

Substituons h en utilisant le résultat de la question précédente :

$$V_1 = \left(H_0 - \frac{mg}{mg + p_0 S} H_0 \right) S = \frac{p_0 S^2}{mg + p_0 S} H_0 \quad \rightarrow \text{Réponse A}$$

Les expressions des réponses A et C s'expriment en $[m]^3$ et pouvaient être retenues.



Les expressions des réponses B et D s'expriment en $[m]^{-1}$ et devaient être éliminées.

• Question 3 : réponse D

Les relations (4) et (5) fournissent deux expressions de p_1 . Une seule corres-

pond à celles proposées : $p_1 = p_0 + \frac{mg}{S} \quad \rightarrow \text{Réponse D}$

• Question 4 : réponse B

La condition géométrique de l'affleurement de la base du cylindre à la surface de l'eau dans la cuve s'écrit simplement : $h = H_0 \quad (6)$

Dans cette question, l'air emprisonné dans la cloche n'est plus un système fermé : le nombre de moles varie, et il n'est pas possible d'exploiter la loi des gaz parfaits. La relation (2) n'est donc plus valable, de même que, par voie de conséquence, le résultat de la question 1.

En revanche, les relations (1) et (3) restent valables. Compte tenu de la relation (6), elles s'écrivent dorénavant respectivement :

$$\begin{cases} H = H_0 - \frac{m}{\rho S} & (1') \\ p_2 = p_0 + \rho g (H_0 - H) & (3') \end{cases}$$

En substituant (1') dans (3'), on obtient :

$$p_2 = p_0 + \frac{mg}{S} \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$



On constate que $p_2 = p_1$. Ce résultat était prévisible. En effet, dans les questions 3 et 4, la cloche (sans l'air emprisonné cette fois) est en équilibre sous l'action de trois forces :

- son poids ;
- la force pressante exercée par l'air extérieur sur la base de la cloche ;
- la force pressante exercée par l'air emprisonné sur la base de la cloche.

(Notons que les forces pressantes exercées sur la surface cylindrique latérale de la cloche s'annulent par symétrie de révolution.)

Les deux premières forces étant **inchangées** d'un équilibre à l'autre, il en va de même de la troisième force, signe que la pression intérieure reste la même.

• Question 5 : réponse **A**

Le volume V_2 s'écrit : $V_2 = (H_0 - H)S$

Substituons H en utilisant la relation (1') : $V_2 = \frac{m}{\rho}$ → Réponse **A**



- Les expressions des réponses A, B et C s'expriment en $[m]^3$ et pouvaient être retenues.
- L'expression de la réponse D s'exprime en $[m]^{-1}$ et devait être éliminée.

• Question 6 : réponse **C**

Avant qu'elle soit envahie par l'eau de la cuve et coule, la cloche est totalement immergée sur une hauteur H_0 . À cet instant, le système {cloche + liquide} est soumis à trois forces :

- le poids de la cloche : $\vec{P} = -mg \cdot \vec{e}_z$
- le poids du liquide : $\vec{P}_0 = -\rho_0 V_M g \cdot \vec{e}_z$
- la poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = \rho S H_0 g \cdot \vec{e}_z$

$$\text{À l'équilibre : } V_M = \frac{\rho S H_0 - m}{\rho_0}$$

→ Réponse **C**

→ QCM 2 Détentes d'un gaz parfait

• Question 1 : réponse **C**

Capacités thermiques à volume constant

On rappelle les relations qui lient entre elles, pour un gaz parfait :

- la **capacité thermique à volume constant** C_v , exprimée en J.K^{-1} (grandeur extensive) ;
- la **capacité thermique molaire à volume constant** $C_{v,m}$, exprimée en $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ (grandeur intensive) ;
- la **capacité thermique massique à volume constant** c_v , exprimée en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ (grandeur intensive) :

$$C_v = nC_{v,m} = mc_v \quad \text{et par conséquent} \quad c_v = \frac{C_{v,m}}{M}$$

Par ailleurs, l'énergie interne d'un gaz parfait s'écrit :

$$U = nC_{v,m}T$$

L'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique étant rappelée dans l'énoncé, on en déduit par identification l'expression de $C_{v,m}$:

$$C_{v,m} = \frac{3}{2}R \quad \text{et} \quad c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M} = \frac{3 \times 8,31}{2 \times 4.10^{-3}} = 3120 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

$$c_v = 3,12 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

→ Réponse **C**

Attention aux grandeurs utilisées à la fois en Chimie et en Physique, telles que le volume V et la masse molaire M : la Chimie prend quelques libertés vis-à-vis du système international d'unités puisqu'elle exprime communément V en litre (L) et M en g.mol^{-1} , mais la Physique s'y conforme systématiquement, et exprime V en m^3 et M en kg.mol^{-1} .



• Question 2 : réponse A

Appliquons la loi des gaz parfaits dans l'état (2) au système fermé constitué des n moles d'hélium :

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2}.$$

La transformation (1) $\rightarrow$ (2) étant isotherme, $T_2 = T_1$, donc :

$$p_2 = \frac{nRT_1}{V_2} = \frac{mRT_1}{MV_2} = \frac{0,5 \times 8,31 \times 600}{4,10^{-3} \times 250,10^{-3}} = 2,49,10^6 \text{ Pa}$$

→ Réponse A



En Thermodynamique, une attention toute particulière doit être portée aux unités, car la plupart des grandeurs manipulées disposent de plusieurs unités usuelles, mais une seule (celle en caractères gras) est conforme au système international en vigueur :

- la pression peut être exprimée en **Pa**, en hPa, en bar, en atm, en mm de mercure ou en torr ;
- la température peut être exprimée en degré Kelvin ou en degré Celsius ;
- le volume peut être exprimé en **m³** ou en litre.



Avec un volume V_2 exprimé en litre, ou une masse molaire M exprimée en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ (cf. remarque de la question précédente), on obtient le résultat de la réponse B, qui est bien évidemment faux.

• Question 3 : réponse B

Le seul travail étant celui des forces de pression extérieures :

$$W_{1,2} = \int_1^2 -p_e dV$$

La détente étant supposée réversible, donc quasi statique, la pression extérieure p_e est égale à chaque instant de la transformation à la pression p du système :

$$W_{1,2} = \int_1^2 -pdV$$

Le gaz étant parfait :

$$W_{1,2} = \int_1^2 -\frac{nRT}{V} dV$$

La détente étant isotherme à T_1 :

$$W_{1,2} = -nRT_1 \int_1^2 \frac{1}{V} dV = -nRT_1 [\ln V]_{V_1}^{V_2} = -nRT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -\frac{mRT_1}{M} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$W_{1,2} = -\frac{0,5 \times 8,31 \times 600}{4,10^{-3}} \ln \left(\frac{250}{100} \right) = -5,71,10^5 \text{ J} = -571 \text{ kJ}$$

→ Réponse B

Signe du travail des forces de pression extérieures

Le travail reçu par un gaz est toujours :

- **positif** lors d'une **compression** ;
- **négatif** lors d'une **détente**.



(1) → (2) est une détente : les réponses C et D ne peuvent donc pas convenir.

• Question 4 : réponse **A**

Relation de Laplace

Elle peut être utilisée sous trois formes différentes **(a)**, **(b)** et **(c)** :

Pour un système **fermé** constitué d'un **gaz parfait** subissant une transformation **adiabatique quasi statique** au cours de laquelle **seules** les forces de pression extérieures travaillent :

$$\begin{cases} pV^\gamma = C^{ste} & \textbf{(a)} \\ p^{1-\gamma}T^\gamma = C^{ste} & \textbf{(b)} \\ TV^{\gamma-1} = C^{ste} & \textbf{(c)} \end{cases} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}.$$

La transformation (1) → (3) satisfait aux 5 conditions énumérées ci-dessus, il est donc possible de lui appliquer la relation de Laplace. Par ailleurs, on connaît T_1 , V_1 et V_3 , et on cherche T_3 , ce qui nous conduit à choisir la forme **(c)** :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$$

$$T_3 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_3} \right)^{\gamma-1} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

Pour un gaz parfait monoatomique, d'après la question 1 :

$$C_{v,m} = \frac{3}{2}R = \frac{R}{\gamma-1} \quad (\text{d'après la relation de Mayer } C_{p,m} - C_{v,m} = R),$$

$$\text{d'où :} \quad \gamma - 1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

$$T_3 = 600 \left(\frac{100}{250} \right)^{\frac{2}{3}} = 326 \text{ K} \quad \rightarrow \textbf{Réponse A}$$

Lors d'une transformation adiabatique d'un gaz :

- la température **croît** s'il s'agit d'une **compression** ;
- la température **décroît** s'il s'agit d'une **détente**.



La transformation (1) → (3) est une détente : les réponses C et D, qui proposent une température T_3 supérieure à T_1 , ne peuvent donc pas convenir.

• Question 5 : réponse **B**

La transformation (1) → (3) → (2) se décompose en deux étapes :

$$W_{1,3,2} = W_{1,3} + W_{3,2}$$

- Lors de l'étape (1) → (3), **adiabatique**, le premier principe s'écrit :

$$\Delta U_{1,3} = W_{1,3} + \underbrace{Q_{1,3}}_0 = W_{1,3}$$

- Lors de l'étape (3) → (2), **isochore**, le travail est nul :

$$W_{3,2} = \int_{V_3}^{V_2} -p_e dV = 0$$

$$\text{Finalement : } W_{1,3,2} = W_{1,3} = \Delta U_{1,3} = \frac{3}{2} nR(T_3 - T_1) = \frac{3mR}{2M}(T_3 - T_1)$$

et numériquement :

$$W_{1,3,2} = \frac{3 \times 0,5 \times 8,31}{2 \times 4 \cdot 10^{-3}} (326 - 600) = -4,27 \cdot 10^5 \text{ J} = -427 \text{ kJ}$$

→ Réponse **B**



La transformation (1) → (3) est une **détente**, donc $W_{1,3,2}$ est **négatif**, ce qui exclut définitivement les réponses C et D.

• **Question 6 : réponse C**

Variation d'entropie d'un système

• $\Delta S = S_e + S_c$ où $\begin{cases} S_e = \int \frac{\delta Q}{T_e} & \text{représente l'entropie échangée} \\ S_c \geq 0 & \text{représente l'entropie créée (signe égal si réversible)} \end{cases}$

- Pour un gaz parfait, on peut utiliser indifféremment deux écritures différentielles :

$$\begin{cases} dS = nC_{v,m} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} & \text{(d)} \\ dS = nC_{p,m} \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p} & \text{(e)} \end{cases}$$

La transformation (1) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (2) se décompose en deux étapes :

$$\Delta S = \Delta S_{1,3} + \Delta S_{3,2}$$

- L'étape (1) $\rightarrow$ (3) est **adiabatique** et **réversible**, donc :

$$S_{e,1,3} = 0 \text{ et } S_{c,1,3} = 0, \quad \text{soit} \quad \Delta S_{1,3} = 0$$

- L'étape (3) $\rightarrow$ (2) est **isochore**, donc on choisira d'appliquer la relation (d) qui se simplifie en :

$$dS = nC_{v,m} \frac{dT}{T} = \frac{3mR}{2M} \frac{dT}{T}$$

et s'intègre pour donner : $\Delta S_{3,2} = \frac{3mR}{2M} \ln\left(\frac{T_2}{T_3}\right)$

Finalement :

$$\Delta S = \Delta S_{3,2} = \frac{3mR}{2M} \ln\left(\frac{T_2}{T_3}\right) = \frac{3 \times 0,5 \times 8,31}{2 \times 4,10^{-3}} \ln\left(\frac{600}{326}\right) = 952 \text{ J.K}^{-1}$$

$\rightarrow$ Réponse C

L'entropie étant une **fonction d'état**, sa variation ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des états initial et final. Une autre façon d'obtenir le résultat consiste donc à intégrer la relation **(d)** sur la transformation isotherme (1) → (2) de la question 2 :

$$\Delta S = \underbrace{\frac{3mR}{2M} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}_0 + \frac{mR}{M} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{mR}{M} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{0,5 \times 8,31}{4 \cdot 10^{-3}} \ln\left(\frac{250}{100}\right) = 952 \text{ J.K}^{-1}$$



La transformation étant **réversible**, l'entropie créée est nulle, et le signe de ΔS ne dépend que du signe des quantités de chaleur échangées :

- pour la transformation (1) → (3) : $\Delta S_{1,3} = 0$;
- la transformation (3) → (2) est un chauffage :
 $Q_{3,2} > 0$ donc $\Delta S = \Delta S_{3,2} > 0$.

Les réponses A, B et D sont donc impossibles.

→ QCM 3 Détente dans le vide

• Question 1 : réponse **D**

L'énergie interne d'un gaz parfait s'écrit : $U = nc_v T$

Les capacités thermiques molaires c_p et c_v , respectivement à pression et volume constants, vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{c_p}{c_v} \\ \text{relation de Mayer : } c_p = c_v + R \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \\ c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \end{array} \right.$$

Dès lors :

$$U = \frac{nR}{\gamma - 1} T \quad \text{et} \quad \Delta U = U_f - U_i = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_i) = \frac{nRT_f - nRT_i}{\gamma - 1}$$

Enfin, d'après la loi des gaz parfaits :

$$\Delta U = \frac{p_f V_f - p_i V_i}{\gamma - 1}$$

→ Réponse **D**

On remarquera que d'un QCM à l'autre, les notations utilisées pour désigner les capacités thermiques molaires diffèrent (emploi ou non de majuscules et d'indices spécifiques). Se gardant de toute uniformisation, le présent ouvrage a voulu rester fidèle à la lettre des énoncés de concours, plaçant ainsi le lecteur au plus proche d'une mise en situation réelle. C'est au candidat qu'il appartient, à la lecture d'un énoncé le jour d'un concours, de faire la part entre ce qui relève des lois **immuables** de la physique, et ce qui relève du contexte et nécessite une **adaptation**.



Le produit pV est homogène à une énergie :

$$pV \equiv [\text{Pa}] \cdot [\text{m}^3] = [\text{N} \cdot \text{m}^{-2}] \cdot [\text{m}^3] = [\text{N}] \cdot [\text{m}] = [\text{J}]$$

On retrouve ce résultat en considérant l'expression du travail des forces de pression extérieures, lequel s'exprime en Joule :

$$W = \int -p_e dV$$

Par conséquent, à cause de la présence de n et/ou de R au dénominateur, les expressions des réponses A et C ne sont pas homogènes à une variation d'énergie interne, et doivent être éliminées.

Par ailleurs, le résultat $\Delta U = 0$ n'a pas de sens concernant une transformation qui est décrite comme étant totalement **quelconque** : la réponse B est fautive.

• Question 2 : réponse **A**

Aucune connaissance de Thermodynamique n'est requise pour répondre à cette question. Une lecture attentive de l'énoncé suffit.

Un volume est toujours **positif**. Le volume ΔV balayé par le piston est donc l'opposé de la variation de volume de l'ensemble des deux compartiments :

$$\Delta V = -[V_{f1} - (V_A + V_B)] = V_A + V_B - V_{f1}$$

→ Réponse **A**

• Question 3 : réponse A

Le premier principe de la Thermodynamique appliqué au gaz entre les états initial et final s'écrit :

$$\Delta U = W + Q$$

La transformation est adiabatique :

$$Q = 0 \quad \text{donc} \quad \Delta U = W \quad (1)$$

La transformation est monobare, c'est-à-dire qu'elle s'effectue à pression extérieure constante, égale à p_0 . Le travail des forces de pression extérieures reçu par le gaz vaut donc :

$$W = \int -p_e dV = -p_0 \int dV = -p_0 (-\Delta V) = p_0 \Delta V$$

Compte tenu des résultats des questions 1 et 2, la relation (1) s'écrit alors :

$$\frac{(p_f V_f - p_i V_i)}{\gamma - 1} = p_0 (V_A + V_B - V_{f1}) \quad (2)$$

- à l'état initial, d'après l'énoncé : $p_i = p_0$ et $V_i = V_A$
- à l'état final, il y a équilibre mécanique du piston $\mathcal{P}$, donc les pressions s'équilibrent de part et d'autre : $p_f = p_0$

Finalement, l'équation (2) se simplifie pour donner :

$$\begin{aligned} \frac{V_{f1} - V_A}{\gamma - 1} &= V_A + V_B - V_{f1} \\ V_{f1} - V_A &= (\gamma - 1)(V_A + V_B - V_{f1}) \\ \gamma V_{f1} &= \gamma V_A + (\gamma - 1)V_B \\ V_{f1} &= V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B \end{aligned}$$

→ Réponse A



Il y a autour de cette question une difficulté majeure qu'il convient d'éclaircir : elle apparaît dans tous les problèmes dans lesquels la modification du volume gazeux s'opère simultanément en deux lieux distincts (ici : déplacement du piston p côté gauche, et occupation progressive du volume V_B côté droit).

Le calcul $W = -p_0 \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_0 \int_{V_A}^{V_{f1}} dV = p_0 (V_A - V_{f1})$ est faux, car le travail W n'est produit qu'à travers p , et c'est donc la seule variation de volume côté gauche qu'il faut prendre en compte, et non pas la variation de volume totale :

Le calcul $W = -p_0 \int_{V_{i, gauche}}^{V_{f, gauche}} dV = -p_0 \int_{V_A + V_B}^{V_{f1}} dV = p_0 (V_A + V_B - V_{f1})$ est juste. Pour convaincre d'éventuels indécis, il est toujours possible de calculer le travail d'une force avec les outils de la mécanique du point. En notant S la section du cylindre, et en définissant un axe horizontal Ox orienté vers la droite, on obtient :

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int \left(p_0 S \cdot \vec{e}_x \right) \cdot \left(dx \cdot \vec{e}_x \right) = p_0 S \int dx = p_0 \frac{S \Delta x}{\Delta V} = p_0 \Delta V$$

• Question 4 : réponse B

D'après la loi des gaz parfaits appliquée au gaz à l'état final :

$$T_{f1} = \frac{p_0 V_{f1}}{nR} = \frac{p_0}{nR} \left(V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B \right) \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$

• Question 5 : réponse B

Le gaz étant parfait, sa variation d'entropie ΔS peut s'écrire de deux façons différentes :

$$\begin{cases} \Delta S = nc_v \ln \left(\frac{T_{f1}}{T_i} \right) + nR \ln \left(\frac{V_{f1}}{V_i} \right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta S = nc_p \ln \left(\frac{T_{f1}}{T_i} \right) - nR \ln \left(\frac{p_{f1}}{p_i} \right) \end{cases} \quad (4)$$

$$T_{f1} = \frac{p_0 V_A}{nR} \left(1 + \frac{(\gamma - 1) V_B}{\gamma V_A} \right) = T_i \left(1 + \frac{(\gamma - 1) V_B}{\gamma V_A} \right) \quad \text{donc} \quad \frac{T_{f1}}{T_i} = 1 + \frac{(\gamma - 1) V_B}{\gamma V_A}$$

Puisque $p_i = p_{f1} = p_0$, il est plus rapide d'utiliser la relation (4) :

$$\Delta S = nc_p \ln \left(\frac{T_{f1}}{T_i} \right) = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln \left(1 + \frac{(\gamma - 1) V_B}{\gamma V_A} \right) \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$



Ce résultat appelle un commentaire.

La transformation étant adiabatique, l'entropie échangée S_e est nulle, donc :

$$\Delta S = S_c \geq 0$$

Le déplacement infiniment lent du piston confère à la transformation un caractère quasi statique. Pour autant, elle n'est pas réversible, car le gaz ne peut pas, sans intervention extérieure, quitter le compartiment B pour revenir dans le compartiment A.

Par conséquent : $\Delta S > 0$ ce qui est bien conforme au résultat établi plus haut.

• Question 6 : réponse D

Dans cette question, à l'état final, le piston P arrive en butée sur la paroi P_0 , donc :

$$V_{f1} = V_B$$

La relation (2) de la question 3 s'écrit alors :

$$\frac{(p_{f2}V_B - p_0V_A)}{\gamma - 1} = p_0(V_A + V_B - V_B) = p_0V_A$$

$$p_{f2}V_B - p_0V_A = (\gamma - 1)p_0V_A$$

$$p_{f2}V_B = \gamma p_0V_A$$

$$p_{f2} = \gamma p_0 \frac{V_A}{V_B}$$

→ Réponse D

• Question 7 : réponse A

D'après la loi des gaz parfaits appliquée au gaz à l'état final :

$$T_{f2} = \frac{p_{f2}V_B}{nR} = \frac{\gamma p_0V_A}{nR}$$

→ Réponse A

→ QCM 4 Mélange de deux gaz

• Question 1 : réponse **C**

La résolution des exercices portant sur les systèmes partitionnés, c'est-à-dire constitués de plusieurs sous-systèmes, nécessite toujours de franchir sans encombre deux étapes déterminantes : celle du choix du système, et celle de la maîtrise des grandeurs extensives.



- Va-t-on appliquer le 1^{er} principe de la Thermodynamique au système {gaz 1}, au système {gaz 2} ou au système {gaz 1 + gaz 2} ? L'analyse des échanges d'énergie (travail et chaleur) permet de répondre à la question. Les systèmes {gaz 1} et {gaz 2} s'échangent du travail et de la chaleur, mais le calcul de ces quantités ne semble pas accessible. En revanche, le système {gaz 1 + gaz 2} est en évolution **adiabatique** et **isochore** (travail des forces de pression extérieures **nul**). C'est donc à ce système qu'il est le plus avantageux d'appliquer le 1^{er} principe :

$$\Delta U = \underbrace{W}_0 + \underbrace{Q}_0 = 0 \quad (1)$$

- L'énergie interne d'un gaz parfait s'écrit : $U = nc_v T$

L'écriture $\Delta U = nc_v \Delta T$ appliquée au système {gaz 1 + gaz 2} n'a aucun sens, car si la température finale est homogène, il n'y a, en revanche, pas de température initiale unique. Il faut donc utiliser le caractère **extensif**, c'est-à-dire **additif**, de la variable U :

$$\Delta U = \underbrace{\Delta U_1}_{\text{gaz 1}} + \underbrace{\Delta U_2}_{\text{gaz 2}} \quad (2)$$

En notant respectivement T_{g1} et T_{g2} les températures des gaz 1 et 2 à un instant quelconque de la transformation, on obtient deux expressions qui, cette fois-ci, ont un sens :

$$\begin{cases} \Delta U_1 = n_1 c_v \Delta T_{g1} = n_1 c_v (T_f - T_1) \\ \Delta U_2 = n_2 c_v \Delta T_{g2} = n_2 c_v (T_f - T_2) \end{cases}$$

En vertu des relations (1) et (2), on peut alors écrire :

$$n_1 c_v (T_f - T_1) + n_2 c_v (T_f - T_2) = 0$$

$$\text{soit } T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} \quad (3) \quad \rightarrow \text{Réponse C}$$



Les expressions des réponses A et B, qui s'expriment respectivement en $[K].[mol]^{-1}$ et en $[K].[mol]$ sont fausses.

• Question 2 : réponse D

Le mélange gazeux étant considéré comme parfait, on peut lui appliquer la loi des gaz parfaits :

$$p_f = \frac{(n_1 + n_2) R T_f}{V_1 + V_2} \quad (4)$$

Les volumes initiaux V_1 et V_2 des deux compartiments s'expriment à l'aide de la loi des gaz parfaits appliquée à chaque gaz à l'état initial :

$$V_1 = \frac{n_1 R T_1}{p_1} \quad (5) \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{n_2 R T_2}{p_2} \quad (6)$$

En reportant (3), (5) et (6) dans (4), on obtient :

$$p_f = \frac{\frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{\frac{n_1 T_1}{p_1} + \frac{n_2 T_2}{p_2}}}{\frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 T_1 p_2 + n_2 T_2 p_1}} = p_1 p_2 \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$



Les expressions des réponses B et C, qui s'expriment en $[Pa].[mol]$ sont fausses.

• Question 3 : réponse **B**

La loi des gaz parfaits appliquée à chaque gaz à l'état final donne :

$$p_{f1} = \frac{n_1 R T_f}{V_1 + V_2} \quad \text{et} \quad p_{f2} = \frac{n_2 R T_f}{V_1 + V_2}$$

soit, compte tenu de l'expression (4) :

$$p_{f1} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} p_f \quad \text{et} \quad p_{f2} = \frac{n_2}{n_1 + n_2} p_f$$

→ Réponse **B**



La réponse A est fausse, car elle propose une pression p_{f1} qui décroît lorsque la fraction molaire du gaz 1 augmente.

Les réponses C et D sont fausses car elles donnent $p_{f1} = p_{f2}$. En outre, la réponse D contredit la **loi de Dalton** qui veut que la pression totale d'un mélange parfait de gaz parfaits soit égale à la somme des pressions partielles :

$$p_f = p_{f1} + p_{f2} \text{ aboutirait ici à } p_f = 2p_f !$$

• Question 4 : réponse **A**

La variable S étant **extensive**, on lui applique le **principe d'additivité**, à l'instar de ce qui avait été fait pour la variable U à la question 1 :

$$\Delta S_{(1)} = \underbrace{\Delta S_{1,(1)}}_{\text{gaz 1}} + \underbrace{\Delta S_{2,(1)}}_{\text{gaz 2}}$$

Pour tout gaz parfait, on dispose de la relation différentielle :

$$dS = n c_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p}$$

qui, appliquée successivement à chacun des deux gaz, et intégrée entre les états initial et final, donne (compte tenu de la question 3) :

$$\begin{cases} \Delta S_{1,(1)} = n_1 c_p \ln \frac{T_f}{T_1} - n_1 R \ln \frac{p_{f1}}{p_1} = n_1 c_p \ln \frac{T_f}{T_1} - n_1 R \ln \left[\frac{n_1 p_f}{(n_1 + n_2) p_1} \right] \\ \Delta S_{2,(1)} = n_2 c_p \ln \frac{T_f}{T_2} - n_2 R \ln \frac{p_{f2}}{p_2} = n_2 c_p \ln \frac{T_f}{T_2} - n_2 R \ln \left[\frac{n_2 p_f}{(n_1 + n_2) p_2} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta S_{1,(1)} = n_1 c_p \ln \frac{T_f}{T_1} - n_1 R \ln \frac{p_f}{p_1} - n_1 R \ln \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2} \right) \\ \Delta S_{2,(1)} = n_2 c_p \ln \frac{T_f}{T_2} - n_2 R \ln \frac{p_f}{p_2} - n_2 R \ln \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right) \end{cases}$$

et, lorsque $n_1 = n_2 = 1$:

$$\begin{cases} \Delta S_{1,(1)} = c_p \ln \frac{T_f}{T_1} - R \ln \frac{p_f}{p_1} - R \ln \left(\frac{1}{2} \right) = c_p \ln \frac{T_f}{T_1} - R \ln \frac{p_f}{p_1} + R \ln 2 \\ \Delta S_{2,(1)} = c_p \ln \frac{T_f}{T_2} - R \ln \frac{p_f}{p_2} - R \ln \left(\frac{1}{2} \right) = c_p \ln \frac{T_f}{T_2} - R \ln \frac{p_f}{p_2} + R \ln 2 \end{cases}$$

soit, par additivité :

$$\Delta S_{(1)} = c_p \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} - R \ln \frac{p_f^2}{p_1 p_2} + 2R \ln 2 = c_p \ln \frac{T_f^2}{T_1 T_2} + R \ln \frac{p_1 p_2}{p_f^2} + 2R \ln 2$$

→ Réponse **A**

• Question 5 : réponse **D**

Lorsque $T_1 = T_2 = T_0$, $p_1 = p_2 = p_0$ et $n_1 = n_2 = 1$, les expressions de T_f et p_f obtenues aux questions 1 et 2 se simplifient pour donner :

$$T_f = T_0 \quad \text{et} \quad p_f = p_0$$

$\Delta S_{(2)}$ est alors une simple application numérique du résultat de la question précédente avec $T_1 = T_2 = T_f = T_0$ et $p_1 = p_2 = p_f = p_0$:

$$\Delta S_{(2)} = 2R \ln 2$$

→ Réponse **D**



Le système {gaz 1 + gaz 2} étant en évolution **adiabatique** (absence d'entropie échangée) et **spontanée irréversible** (création d'entropie) :

$$\Delta S_{(2)} > 0$$

Les réponses A et B sont donc impossibles.

• **Question 6 : réponse B**

Les conditions initiales de température, de pression et de composition chimique sont maintenant les mêmes dans les deux compartiments. La suppression de la paroi n'entraîne donc aucune modification, et l'entropie du système {gaz 1 + gaz 2} demeure inchangée :

$$\Delta S_{(3)} = 0$$

→ **Réponse B**

Comme dans la question précédente, on a : $T_f = T_0$ et $p_f = p_0$. Toutefois, n_1 et n_2 n'étant pas connus, l'expression de $\Delta S_{(1)}$ établie à la question 4 n'est pas valable ici.



→ **QCM 5 Cycle Diesel**

• **Question 1 : réponse A**

- Le gaz est **parfait**.
- la transformation 1 → 2 est **adiabatique**.
- la transformation 1 → 2 est réversible, donc **quasi-statique**.
- lors de la transformation 1 → 2, le système est **fermé**.
- lors de la transformation 1 → 2, **seules** les forces de pression extérieures travaillent.

Ces 5 conditions étant réunies, il est possible d'appliquer la **relation de Laplace** sous une de ses trois formes :

$$\begin{cases} pV^\gamma = C^{ste} & \text{(a)} \\ p^{1-\gamma} T^\gamma = C^{ste} & \text{(b)} \\ TV^{\gamma-1} = C^{ste} & \text{(c)} \end{cases}$$

On insiste sur le fait que si une seule des 5 conditions énumérées ci-dessus fait défaut, la relation de Laplace n'est plus valable.

On connaît $T_1 = T_m$ et le rapport volumétrique de compression $\beta_v = \frac{V_M}{V_m} = \frac{V_1}{V_2}$, ce qui nous conduit à choisir la forme (c) : $T_m V_M^{\gamma-1} = T_2 V_m^{\gamma-1}$

$$T_2 = T_m \left(\frac{V_M}{V_m} \right)^{\gamma-1} = T_m \beta_v^{\gamma-1} = 293 \times 17^{0.4} = 910 \text{ K} \quad \rightarrow \text{Réponse A}$$



• Question 2 : réponse C

Au cours de la transformation $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, les soupapes sont fermées, donc le nombre n de moles de gaz est conservé.

- À l'état 1 :

$$n = \frac{p_m V_M}{RT_m}$$

- À l'état 3 :

$$n = \frac{p_M V_m}{RT_3}$$

soit, en égalisant : $T_3 = \frac{p_M T_m}{p_m \beta_v} = \frac{60 \cdot 10^5 \times 293}{10^5 \times 17} = 1034 \text{ K} \rightarrow \text{Réponse C}$



Dans le diagramme de Clapeyron, les **isothermes** ont une allure hyperbolique concave, mais leur pente est moins prononcée que celle des adiabatiques réversibles. Par conséquent :

$$T_m < T_2 < T_3 \quad \text{et} \quad T_5 < T_M$$

Or $798 < 910$: la réponse A est impossible.

• Question 3 : réponse D

La transformation $4 \rightarrow 5$ possède les mêmes propriétés que la transformation $1 \rightarrow 2$ (cf. question 1). Il est donc possible d'utiliser la relation de Laplace.

On connaît $T_4 = T_M$, $p_4 = p_M$ et $V_5 = V_M$, et on cherche T_5 , ce qui nécessite d'avoir recours à deux équations.

- La forme (c) de la relation de Laplace :

$$T_M V_4^{\gamma-1} = T_5 V_M^{\gamma-1} \quad \text{d'où} \quad T_5 = T_M \left(\frac{V_4}{V_M} \right)^{\gamma-1} \quad (1)$$

- La loi des gaz parfaits appliquée aux états 1 et 4 :

$$n = \frac{p_m V_M}{\underbrace{RT_m}_{\text{état 1}}} = \frac{p_M V_4}{\underbrace{RT_M}_{\text{état 4}}} \quad \text{d'où} \quad \frac{V_4}{V_M} = \frac{p_m T_M}{p_M T_m} \quad (2)$$



On évitera d'appliquer la loi des gaz parfaits à l'état 5 pour lequel ni pression ni la température ne sont connues.

En reportant (2) dans (1), on obtient :

$$T_5 = T_M \left(\frac{P_M T_M}{P_M T_m} \right)^{\gamma-1} = 2073 \times \left(\frac{10^5 \times 2073}{60.10^5 \times 293} \right)^{0.4} = 882 \text{ K}$$

→ Réponse **D**

• Question 4 : réponse **B**

Dans cette question et les suivantes, toutes les grandeurs énergétiques manipulées (énergie interne, travail et chaleur) sont massiques, c'est-à-dire qu'elles s'entendent pour 1 kg de gaz.



On a :
$$Q_c = Q_{23} + Q_{34} \quad (3)$$

- Le premier principe de la Thermodynamique appliqué entre les états 2 et 3 s'écrit :

$$\Delta U_{23} = W_{23} + Q_{23}$$

La transformation 2 → 3 étant **isochore**, le travail W_{23} est nul :

$$W_{23} = \int_{V_m}^{V_m} -p_c dV = 0 \quad \text{d'où} \quad Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{nc_v}{m} (T_3 - T_2) = \frac{R}{M(\gamma - 1)} (T_3 - T_2) \quad (4)$$

- La transformation 3 → 4 est **isobare** :

$$Q_{34} = \Delta H_{34} = \frac{nc_p}{m} (T_M - T_3) = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} (T_M - T_3) \quad (5)$$

Finalement, en reportant (4) et (5) dans (3), on obtient :

$$Q_c = \frac{R}{M(\gamma - 1)} [\gamma T_M + (1 - \gamma) T_3 - T_2]$$

$$Q_c = \frac{8,31}{29.10^{-3} \times 0,4} (1,4 \times 2073 - 0,4 \times 1034 - 910) = 1,131.10^6 \text{ J.kg}^{-1}$$

$$Q_c = 1131 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

→ Réponse **B**

• Question 5 : réponse C

Le premier principe de la Thermodynamique appliqué entre les états 5 et 1 s'écrit :

$$\Delta U_{51} = W_{51} + Q_f$$

La transformation 5 → 1 étant **isochore**, le travail W_{51} est nul :

$$W_{51} = \int_{V_M}^{V_M} -p_e \frac{dV}{0} = 0$$

d'où :

$$Q_f = \Delta U_{51} = \frac{nc_v}{m} (T_m - T_5) = \frac{R}{M(\gamma - 1)} (T_m - T_5)$$

et numériquement :

$$Q_f = \frac{8,31}{29.10^{-3} \times 0,4} (293 - 882) = -4,22.10^5 \text{ J.kg}^{-1} = \mathbf{-422 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

→ Réponse C

• Question 6 : réponse A

L'énergie interne U est une **fonction d'état**, donc sa variation au cours d'un **cycle** est **nulle** :

$$\Delta U_{cycle} = 0$$

Le premier principe de la Thermodynamique appliqué à un cycle s'écrit :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q_c + Q_f = 0$$

Le travail W échangé par un kg d'air avec le milieu extérieur au cours d'un cycle vaut alors :

$$W = -Q_c - Q_f$$

soit numériquement :

$$W = -1131 - (-422) = \mathbf{-709 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

→ Réponse A

→ QCM 6 Cycle de Carnot

• Question 1 : réponses **A et D**

Interprétation graphique de W dans le diagramme de Clapeyron

- Pour une transformation quelconque, le travail W des forces de pression extérieures reçu par le système s'écrit :

$$W = - \int p_e dV$$

- Si la transformation est **quasi statique**, et a fortiori si elle est **réversible** :

$$W = - \int p dV$$

W représente alors l'opposé de l'aire algébrique sous la courbe $p = f(V)$ dans un diagramme de Clapeyron.

- Pour un **cycle** quasi statique ou **réversible** :

$$W = - \oint p dV$$

Dans ce cas, W représente :

- l'aire absolue intérieure au cycle dans un diagramme de Clapeyron, si le cycle est parcouru en sens trigonométrique ($W > 0$) ;
- l'opposé de l'aire absolue intérieure au cycle dans un diagramme de Clapeyron, si le cycle est parcouru en sens horaire ($W < 0$).

La machine thermique étudiée ici, une pompe à chaleur, est à classer, comme le réfrigérateur, parmi les **récepteurs** dithermes : tous deux sont alimentés par le réseau EDF.

Par conséquent :

$W > 0$, et le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique **ADCBA**.

Enfin, la machine n'est **ditherme** que si les températures des sources chaude et froide sont distinctes, la température de la source chaude étant supérieure à celle de la source froide, soit :

$$T(0) > T_{ext}$$

→ Réponses **A et D**

• Question 2 : réponse D

Au cours d'un cycle, le fluide reçoit les énergies δW , δQ_c et δQ_f , lesquelles satisfont aux deux principes de la Thermodynamique :

• 1^{er} principe :
$$dU = \delta W + \delta Q_c + \delta Q_f = \underbrace{0}_{\text{cycle}} \quad (1)$$

• 2nd principe :
$$dS = \delta S_e + \underbrace{\delta S_c}_{\text{nul car réversible}} = \delta S_e = \frac{\delta Q_c}{T(t)} + \frac{\delta Q_f}{T_{\text{ext}}} = \underbrace{0}_{\text{cycle}} \quad (2)$$

De l'équation (2), on tire :
$$\delta Q_f = -\frac{T_{\text{ext}}}{T(t)} \delta Q_c$$

que l'on reporte dans l'équation (1) :

$$\delta W + \delta Q_c \left(1 - \frac{T_{\text{ext}}}{T(t)} \right) = 0$$

$$\delta Q_c = -\delta W \frac{T(t)}{T(t) - T_{\text{ext}}}$$

L'efficacité thermique de la pompe à chaleur vaut alors :

$$\eta(t) = -\frac{\delta Q_c}{\delta W} = \frac{T(t)}{T(t) - T_{\text{ext}}} \quad (3) \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$

• Question 3 : réponse B

La difficulté de cette question réside dans le fait que la source chaude de la pompe à chaleur n'est pas un thermostat, de capacité thermique infinie et température constante, mais un volume d'air de capacité thermique finie, donc de température $T(t)$ variable avec le temps. Cela oblige à raisonner sur des quantités élémentaires, et à résoudre une équation différentielle.

Pendant la durée dt d'un cycle : $\delta W = p dt \quad (4)$

Pendant un cycle, l'air de la pièce, de capacité thermique totale C , reçoit la quantité de chaleur $-\delta Q_c$ qui lui permet d'augmenter sa température $T(t)$ de dT :

$$-\delta Q_c = C dT \quad (5)$$

Compte tenu de (4) et (5), la relation (3) établie à la question précédente s'écrit :

$$\frac{C dT}{p dt} = \frac{T(t)}{T(t) - T_{\text{ext}}}$$

d'où l'équation différentielle :
$$\frac{C}{p} \left(1 - \frac{T_{\text{ext}}}{T} \right) dT = dt$$



qui s'intègre, entre les dates $t = 0$ et t_1 , pour donner :

$$\frac{C}{p} \int_{T_0}^{T_1} \left(1 - \frac{T_{ext}}{T} \right) dT = \int_0^{t_1} dt$$

$$\frac{C}{p} [T - T_{ext} \ln T]_{T_0}^{T_1} = [t]_0^{t_1}$$

soit finalement :
$$t_1 = \frac{C}{p} \left(T_1 - T_0 - T_{ext} \ln \frac{T_1}{T_0} \right) \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$

• Question 4 : réponse **D**

L'efficacité thermique de la résistance chauffante d'un radiateur électrique est égale à **1**, ce qui signifie que la totalité de l'énergie électrique dissipée par effet Joule est utilisée pour élever la température de la pièce.

Pendant l'intervalle de temps dt , la température de l'air de la pièce s'élève de dT , et le bilan s'écrit : $CdT = p dt$

Cette équation différentielle s'intègre, entre les dates $t = 0$ et t_2 , pour donner :

$$C \int_{T_0}^{T_1} dT = p \int_0^{t_2} dt$$

soit finalement :
$$t_2 = \frac{C}{p} (T_1 - T_0) \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$

• Question 5 : réponse **C**

Dans cette question, la pompe à chaleur est arrêtée.

Dorénavant, le système étudié est l'air de la pièce. Pendant l'intervalle de temps dt , celui-ci échange avec l'extérieur la quantité de chaleur élémentaire :

$$\delta Q = -kC [T(t) - T_{ext}] dt$$

L'air étant en évolution isochore : $\delta Q = CdT$

d'où l'équation différentielle :
$$\frac{dT}{T - T_{ext}} = -k dt$$

qui s'intègre, entre la date $t = 0$ à laquelle $T(0) = 295 \text{ K}$, et la date t , pour donner :

$$\int_{T(0)}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_{ext}} = -k \int_0^t dt$$

$$[\ln(T - T_{ext})]_{T(0)}^{T(t)} = -k [t]_0^t$$

$$\ln \left(\frac{T(t) - T_{ext}}{T(0) - T_{ext}} \right) = -kt$$

soit finalement :

$$k = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{T(0) - T_{ext}}{T(t) - T_{ext}} \right)$$

Numériquement, lorsque $t = 3$ heures : $T(t) = T(0) - 3 = 295 - 3 = 292 \text{ K}$

d'où : $k = \frac{1}{3 \times 3600} \ln \left(\frac{295 - 290}{292 - 290} \right) = 84,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ → Réponse C

• Question 6 : réponse A

Pendant l'intervalle de temps dt , l'air de la pièce échange :

- avec la pompe à chaleur en fonctionnement, la quantité de chaleur échangée aux questions 2 et 3 :

$$\delta Q_1 = -\delta Q_c = \frac{pT(t)}{T(t) - T_{ext}} dt$$

- avec l'air extérieur, du fait de la présence de la fuite thermique, la quantité de chaleur indiquée à la question 5 :

$$\delta Q_2 = -kC [T(t) - T_{ext}] dt$$

Pendant l'intervalle de temps dt , la température de l'air de la pièce s'élève de dT , et le bilan thermique s'écrit :

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 = CdT$$

$$\frac{pT(t)}{T(t) - T_{ext}} dt - kC [T(t) - T_{ext}] dt = CdT \quad (6)$$

La température maximale $T_{\max}$ qu'il est possible d'obtenir dans la pièce correspond à l'établissement du régime permanent, soit à : $dT = 0$
L'équation (6) se simplifie alors en :

$$\frac{pT_{\max}}{T_{\max} - T_{ext}} - kC (T_{\max} - T_{ext}) = 0$$

On obtient finalement une équation du second degré en $T_{\max}$:

$$T_{\max}^2 - 2 \left(T_{ext} + \frac{p}{2kC} \right) T_{\max} + T_{ext}^2 = 0$$

→ Réponse A

chapitre 5

Électromagnétisme

	énoncés	corrigés
• QCM 1 : Noyau atomique	180	192
• QCM 2 : Atome d'hydrogène	182	197
• QCM 3 : Distribution de charges à symétrie sphérique	184	202
• QCM 4 : Disque chargé	186	206
• QCM 5 : Solénoïde	188	211
• QCM 6 : Bobine torique à section carrée	190	217

→ QCM 1 Noyau atomique

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a . On désigne par $\vec{r} = \vec{OP}$ le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

où ρ_0 est une constante positive.

• Question 1

Exprimer la charge totale Q du noyau.

A $Q = \frac{1}{3} \pi \epsilon_0 \rho_0 a^3$

B $Q = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3$

C $Q = \frac{3}{5} \pi \epsilon_0 \rho_0 a^2$

D $Q = \frac{\rho_0 a^2}{2\pi}$

• Question 2

Les propriétés de symétrie du champ électrostatique permettent d'affirmer que :

A le champ électrique est contenu dans les plans de symétrie des charges.

B le champ électrique est orthogonal aux plans d'anti-symétrie des charges.

C le champ électrique est orthogonal aux plans de symétrie des charges.

D le champ électrique est contenu dans les plans d'anti-symétrie des charges.

• Question 3

Calculer le champ électrique $\vec{E}_{\text{ext}}(P)$ en tout point P extérieur à la sphère ($r > a$)

A $\vec{E}_{\text{ext}}(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^3} \vec{r}$

B $\vec{E}_{\text{ext}}(P) = \frac{\rho_0 a^3}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$

C $\vec{E}_{\text{ext}}(P) = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{r}$

D $\vec{E}_{\text{ext}}(P) = \vec{0}$

• Question 4

Calculer le champ électrique $\vec{E}_{\text{int}}(P)$ en tout point P intérieur à la sphère ($r < a$).

A $\vec{E}_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{3} - \frac{3r^2}{4a^2} \right) \vec{r}$

B $\vec{E}_{\text{int}}(P) = \frac{3\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{4} - \frac{4r^2}{3a^2} \right) \vec{r}$

C $\vec{E}_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \vec{r}$

D $\vec{E}_{\text{int}}(P) = \vec{0}$

• Question 5

Exprimer le potentiel $V_{\text{ext}}(P)$ créé par le noyau lorsque $r > a$.

A $V_{\text{ext}}(P) = \frac{\rho_0 a^2}{4\pi\epsilon_0}$

B $V_{\text{ext}}(P) = \frac{4\rho_0 a^2}{3\pi\epsilon_0 r}$

C $V_{\text{ext}}(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r}$

D $V_{\text{ext}}(P) = \frac{\pi\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 r}$

• Question 6

Exprimer le potentiel $V_{\text{int}}(P)$ créé par le noyau lorsque $r < a$.

A $V_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2} \right)$

B $V_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{a} \right)$

C $V_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{6} - \frac{r^2}{3} - \frac{r}{3a} \right)$

D $V_{\text{int}}(P) = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{4a^2} \right)$

→ QCM 2 Atome d'hydrogène

• Question 1

Le noyau d'un atome d'hydrogène, supposé ponctuel, de charge électrique $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, est localisé en O , origine du système de coordonnées sphériques. La charge électrique $-e$ de l'électron de cet atome est, elle, répartie dans *tout* l'espace, avec une charge volumique :

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}}$$

où r désigne la coordonnée radiale du système de coordonnées sphériques, a_0 est une constante positive et ρ_0 une constante que l'on déterminera plus loin. Sachant que la fonction $g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ admet pour primitive $G(x) = -(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} + C$ où C est une constante, calculer la charge électrique totale $Q(R)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon R .

A $Q(R) = e + \frac{4}{3} \pi a_0^3 \rho_0 \left[1 - e^{-2\frac{R}{a_0}} \right]$

B $Q(R) = e + 2\pi a_0^3 \rho_0 - 2\pi a_0^3 \rho_0 \cdot e^{-2\frac{R}{a_0}}$

C $Q(R) = e + 4\pi a_0^3 \rho_0 - \pi a_0^3 \rho_0 \left(1 + 2\frac{R}{a_0} \right) \cdot e^{-2\frac{R}{a_0}}$

D $Q(R) = e + \pi a_0^3 \rho_0 - \pi a_0^3 \rho_0 \left[1 + 2\frac{R}{a_0} + 2\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 \right] \cdot e^{-2\frac{R}{a_0}}$

• Question 2

Calculer la charge totale contenue dans tout l'espace et en déduire ρ_0 .

A $\rho_0 = -\frac{3e}{4\pi a_0^3}$

B $\rho_0 = -\frac{e}{2\pi a_0^3}$

C $\rho_0 = -\frac{e}{\pi a_0^3}$

D $\rho_0 = \frac{e}{\pi a_0^3}$

• Question 3

Exprimer la composante radiale $E_r(r)$ du champ électrique créé par l'atome (ϵ_0 désignant la permittivité du vide) :

A $E_r(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + 2\frac{r}{a_0} + 2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \right] \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}}$

B $E_r(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + 2\frac{r}{a_0} \right) \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}}$

C $E_r(r) = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}}$

D $E_r(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}}$

• Question 4

Le potentiel électrostatique créé par l'atome s'exprime sous la forme suivante :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + K \right) \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}}$$

Déterminer K .

A $K = 0$

B $K = \frac{1}{a_0}$

C $K = \frac{1}{2a_0}$

D $K = \frac{2}{a_0}$

• Question 5

On suppose désormais que l'électron est assimilable à un point matériel M , de charge $-e$ localisée en M , que sa trajectoire est un cercle de rayon a_0 et de centre O fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire supposé galiléen, et que l'atome est isolé du reste de l'univers. Calculer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron dans $\mathcal{R}$. On négligera les forces d'interaction gravitationnelle entre les deux particules.

A $\mathcal{E}_m = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a_0}$

B $\mathcal{E}_m = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$

C $\mathcal{E}_m = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2}$

D $\mathcal{E}_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$

• Question 6

Expérimentalement, on mesure une énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de $-13,6$ eV.

Calculer a_0 , sachant que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9,0 \cdot 10^9$ SI.

A $a_0 = 53$ pm

B $a_0 = 53$ nm

C $a_0 = 0,11$ nm

D $a_0 = 0,21$ pm

→ QCM 3 Distribution de charges à symétrie sphérique

Une distribution de charges présentant une symétrie sphérique autour d'un point O crée en un point M quelconque de l'espace situé à une distance $OM = r$ de O , un potentiel électrostatique de la forme :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$$

où a_0 et q sont des constantes positives.

• Question 1

Quelle est la dimension de la constante a_0 ?

A a_0 a la dimension d'un temps.

B a_0 a la dimension de l'inverse d'une longueur.

C a_0 a la dimension d'une longueur.

D a_0 a la dimension d'un potentiel.

• Question 2

Exprimer le champ électrique $\vec{E}$.

A $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$

B $\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \left(\frac{2}{a_0} + \frac{1}{r} \right) \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$

C $\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{2}{r} \right) \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$

D $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r} \right) \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$

• Question 3

Calculer le flux sortant $\Phi(R)$ du champ électrique $\vec{E}$ à travers une sphère de rayon R centrée sur O .

A $\Phi(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R}{a_0} + 2 \right) \cdot e^{-\frac{R}{a_0}}$

B $\Phi(R) = \frac{q}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{a_0} + 1 \right) \cdot e^{-\frac{R}{a_0}}$

C $\Phi(R) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{R}{a_0} + 1 \right) \cdot e^{-\frac{R}{a_0}}$

D $\Phi(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot e^{-\frac{R}{a_0}}$

• Question 4

Les limites $\Phi(0)$ et $\Phi(\infty)$ du flux Φ quand R tend respectivement vers zéro et vers l'infini sont :

A $\Phi(0) = \frac{q}{\epsilon_0}$ et $\Phi(\infty) = 0$

B $\Phi(0) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}$ et $\Phi(\infty) = 0$

C $\Phi(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ et $\Phi(\infty) = 0$

D $\Phi(0) = \frac{q}{2\epsilon_0}$ et $\Phi(\infty) = 0$

• Question 5

On en déduit que la distribution de charges qui crée ce potentiel est constituée :

A d'une charge q placée en O et d'une charge $-q$ répartie dans tout l'espace.

B d'une charge $-q$ placée en O et d'une charge $+q$ répartie dans tout l'espace.

C d'une charge $-q$ répartie dans tout l'espace.

D d'une charge q placée en O et d'une charge $2q$ répartie dans tout l'espace.

• Question 6

Calculer le potentiel $V_0(r)$ créé par la distribution de charges répartie dans tout l'espace.

A $V_0(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

B $V_0(r) = -\frac{q}{\epsilon_0 r} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$

C $V_0(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-\frac{r}{a_0}} + 1 \right)$

D $V_0(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-\frac{r}{a_0}} - 1 \right)$

→ QCM 4 Disque chargé

• Question 1

Un disque *infinitement mince*, de centre O , d'axe Oz et de rayon a , porte une charge totale Q *uniformément répartie* sur sa surface.

Calculer le potentiel $V_1(z)$ en tout point $M(0, 0, z)$ de l'axe Oz , dans le cas où z est positif.

A $V_1(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}} + \frac{z}{a} \right)$

B $V_1(z) = \frac{Q}{4\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} - \frac{z}{a} \right)$

C $V_1(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} - \frac{z}{a} \right)$

D $V_1(z) = \frac{Q}{2\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} + \frac{z}{a} \right)$

• Question 2

Calculer le potentiel $V_2(z)$ en tout point $M(0, 0, z)$ de l'axe Oz , dans le cas où z est négatif.

A $V_2(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} + \frac{z}{a} \right)$

B $V_2(z) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}} - \frac{z}{a} \right)$

C $V_2(z) = \frac{Q}{4\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}} + \frac{z}{a} \right)$

D $V_2(z) = -\frac{Q}{2\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} - \frac{z}{a} \right)$

• Question 3

On désigne par $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire porté par l'axe Oz . Exprimer le champ électrique $\vec{E}_1(z)$ en tout point $M(0, 0, z)$ de l'axe Oz , dans le cas où z est positif.

A $\vec{E}_1(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{z/a}{\sqrt{1 - z^2/a^2}} + 1 \right) \cdot \vec{e}_z$

B $\vec{E}_1(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(-\frac{z/a}{\sqrt{1 + z^2/a^2}} + 1 \right) \cdot \vec{e}_z$

C $\vec{E}_1(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(-\frac{z/a}{\sqrt{1 + z^2/a^2}} - 1 \right) \cdot \vec{e}_z$

D $\vec{E}_1(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{z/a}{\sqrt{1 - z^2/a^2}} - 1 \right) \cdot \vec{e}_z$

• Question 4

Exprimer le champ électrique $\vec{E}_2(z)$ en tout point $M(0, 0, z)$ de l'axe Oz , dans le cas où z est négatif.

- A** $\vec{E}_2(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{z/a}{\sqrt{1 - z^2/a^2}} - 1 \right) \cdot \vec{e}_z$
B $\vec{E}_2(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(-\frac{z/a}{\sqrt{1 + z^2/a^2}} + 1 \right) \cdot \vec{e}_z$
C $\vec{E}_2(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{z/a}{\sqrt{1 - z^2/a^2}} + 1 \right) \cdot \vec{e}_z$
D $\vec{E}_2(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(-\frac{z/a}{\sqrt{1 + z^2/a^2}} - 1 \right) \cdot \vec{e}_z$

• Question 5

Calculer la variation du champ électrique à la traversée de la distribution :

$$\delta \vec{E} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\vec{E}_1(\epsilon) - \vec{E}_2(-\epsilon) \right]$$

- A** $\delta \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z$
B $\delta \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z$
C $\delta \vec{E} = \vec{0}$
D $\delta \vec{E} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z$

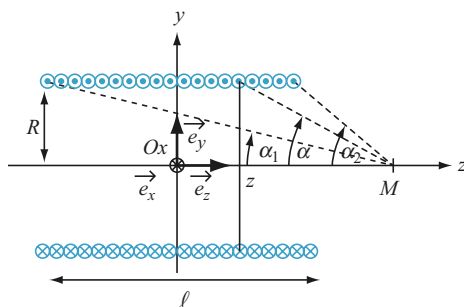
• Question 6

On perce dans le disque un trou circulaire de rayon b centré en O . Calculer la variation $\delta \vec{E}_0$ du champ électrique lors du passage d'un point $M_1(0, 0, \epsilon)$ au point $M_2(0, 0, -\epsilon)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

- A** $\delta \vec{E}_0 = \vec{0}$
B $\delta \vec{E}_0 = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 (a-b)^2} \cdot \vec{e}_z$
C $\delta \vec{E}_0 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cdot \vec{e}_z$
D $\delta \vec{E}_0 = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z$

→ QCM 5 Solénoïde

Un solénoïde mince d'axe Oz et de longueur ℓ est constitué de N spires circulaires jointives identiques de rayon R parcourues par un courant d'intensité I . On désigne par z la cote d'une spire vue sous un angle α depuis un point M de l'axe Oz à la cote z_M (cf. figure ci-dessous).



• Question 1

Compte tenu de la symétrie des sources, on peut affirmer que :

- A** en tout point de l'axe Oz , le champ magnétique est porté par cet axe.
- B** le champ magnétique est orthogonal au plan xOy en tout point de ce plan.
- C** le champ magnétique est uniforme en tout point de l'espace.
- D** le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

• Question 2

Exprimer, en fonction de α , le champ magnétique créé en M par la spire située à la cote z sur l'axe Oz .

A $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{R} \sin^2 \alpha \cdot \vec{e}_z$

B $\vec{B} = \frac{I}{\mu_0 R} \cos^3 \alpha \cdot \vec{e}_z$

C $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z$

D $\vec{B} = \frac{I}{\mu_0 R} \tan^3 \alpha \cdot \vec{e}_z$

• Question 3

Une variation dz de la cote z d'une spire entraîne une variation $d\alpha$ de l'angle α . Exprimer dz en fonction de α et $d\alpha$.

A $dz = \frac{R}{\tan^2 \alpha} d\alpha$

B $dz = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha$

C $dz = \frac{R}{\sin^3 \alpha} d\alpha$

D $dz = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$

• Question 4

Exprimer le nombre dN de spires contenues dans un élément de longueur dz de solénoïde.

A $dN = \frac{\ell}{N} dz$

B $dN = \frac{N}{\ell} dz$

C $dN = \frac{2N}{\ell} dz$

D $dN = \frac{N}{2\ell} dz$

• Question 5

Exprimer le champ magnétique en tout point M de l'axe Oz en fonction des angles α_1 et α_2 définis sur la figure de l'énoncé.

A $\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \cdot \vec{e}_z$

B $\vec{B} = \frac{NI}{2\mu_0 \ell} (\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2) \cdot \vec{e}_z$

C $\vec{B} = \frac{NI}{2\mu_0 \ell} (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) \cdot \vec{e}_z$

D $\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \cdot \vec{e}_z$

• Question 6

Exprimer le champ magnétique en tout point M de l'axe Oz d'un solénoïde infini constitué de n spires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité I .

A $\vec{B} = \frac{\mu_0 nI}{4\pi} \cdot \vec{e}_z$

B $\vec{B} = \mu_0 nI \cdot \vec{e}_z$

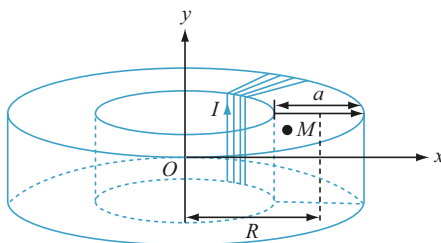
C $\vec{B} = \frac{nI}{\mu_0} \cdot \vec{e}_z$

D $\vec{B} = \frac{nI}{2\mu_0} \cdot \vec{e}_z$

→ QCM 6 Bobine torique à section carrée

• Question 1

Une bobine est constituée par un fil conducteur bobiné en spires jointives sur un tore circulaire à section carrée de côté a et de rayon moyen R (cf. figure ci-dessous). On désigne par n le nombre total de spires et par I l'intensité du courant qui les parcourt.



Tout plan méridien du bobinage, c'est-à-dire tout plan contenant l'axe de révolution Oy , est :

- A** plan de symétrie de la distribution de courants.
- B** plan d'antisymétrie de la distribution de courants.
- C** plan d'antisymétrie du champ magnétique.
- D** plan de symétrie du champ magnétique.

• Question 2

Il en résulte que les lignes de champ du champ magnétique passant par un point quelconque M situé à l'intérieur de la bobine sont :

- A** des cercles d'axe Oy .
- B** des cercles de centre O .
- C** des cercles dont le centre est le centre de la spire contenant M .
- D** des carrés dont l'un des sommets contient M .

• Question 3

Calculer la norme du champ magnétique qui règne en un point $M(x, y)$ quelconque du plan xOy à l'intérieur du tore.

A $B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}}$

B $B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi x}$

C $B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi y}$

D $B = \frac{\mu_0 n I x}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}}$

• Question 4

Calculer le flux φ du champ magnétique à travers la surface d'une spire dont la normale est orientée dans le sens du champ.

A $\varphi = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \ln\left(\frac{2R + a}{2R - a}\right)$

B $\varphi = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R + a}{R - a}\right)$

C $\varphi = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R + 2a}{2R - 2a}\right)$

D $\varphi = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right)$

• Question 5

On désigne respectivement par $B_{\max}$ et $B_{\min}$ les valeurs maximum et minimum du champ magnétique à l'intérieur de la bobine. Calculer la valeur numérique du rapport $\frac{a}{R}$ pour une variation relative du champ de 10 % :

$$2. \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\max} + B_{\min}} = 10 \%$$

A $\frac{a}{R} = 0,100$

B $\frac{a}{R} = 0,050$

C $\frac{a}{R} = 0,075$

D $\frac{a}{R} = 0,200$

→ QCM 1 Noyau atomique

• Question 1 : réponse B

La charge totale est obtenue par sommation intégrale triple :

$$Q = \iiint_{\substack{\text{boule de} \\ \text{rayon } a}} \rho(r) d\tau$$

Le système de coordonnées implicitement choisi par l'énoncé est celui des coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O. L'élément de volume $d\tau$ s'écrit :

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Deux astuces facilitent la mémorisation de $d\tau$:

- l'homogénéité des dimensions : $\underbrace{d\tau}_{[m]^3} = \underbrace{r^2}_{[m]^2} \underbrace{\sin \theta dr d\theta d\varphi}_{[m]}$
- l'homogénéité des infiniment petits :

$$\underbrace{d\tau}_{\substack{\text{infiniment petit} \\ \text{d'ordre 3}}} = r^2 \sin \theta \underbrace{dr}_{\substack{\text{infiniment petit} \\ \text{d'ordre 1}}} \underbrace{d\theta}_{\substack{\text{infiniment petit} \\ \text{d'ordre 1}}} \underbrace{d\varphi}_{\substack{\text{infiniment petit} \\ \text{d'ordre 1}}}$$

En reportant les expressions de $\rho(r)$ et $d\tau$ dans celle de Q , on obtient :

$$Q = \iiint_{\substack{\text{boule de} \\ \text{rayon } a}} \rho_0 \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) \sin \theta dr d\theta d\varphi = \rho_0 \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Concernant les bornes d'intégration des intégrales en θ et φ , le choix de faire varier θ sur $[0, 2\pi]$ et φ sur $[0, \pi]$, a priori envisageable, n'est en réalité pas possible car alors $\sin \theta$ ne garderait pas un signe constant. Or, $\sin \theta$ intervient dans l'expression de $d\tau$, élément de volume qui doit rester positif. Ce bornage interdirait donnerait d'ailleurs ici une charge Q nulle, résultat différent de celui obtenu plus loin. La remarque vaut aussi pour dS , élément de surface, qui doit également rester positif.

$$Q = \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right]_0^a \cdot [-\cos \theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$Q = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3$$

→ Réponse B



Les dimensions des quatre expressions proposées sont toutes différentes.

- L'expression de la réponse A s'exprime en $[C][F][m]^{-1}$.

$$Q = \frac{1}{3} \pi \underbrace{\varepsilon_0}_{[F][m]^{-1}} \underbrace{\rho_0}_{[C][m]^{-3}} \underbrace{a^3}_{[m]^3} \equiv [C][F][m]^{-1}$$

- L'expression de la réponse B s'exprime en $[C]$.
- L'expression de la réponse C s'exprime en $[C][F][m]^{-2}$.
- L'expression de la réponse D s'exprime en $[C][m]^{-1}$.

Seule la réponse B pouvait convenir.

• Question 2 : réponses **A et B**

Propriétés de symétrie et d'antisymétrie en électrostatique

- 1) Si un point M appartient à un plan de symétrie de la distribution de charges, le champ $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan de symétrie.
- 2) Si un point M appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de charges, le champ $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan d'antisymétrie.
- 3) Un plan de symétrie de la distribution de charges est un plan de symétrie pour le champ électrique.
- 4) Un plan d'antisymétrie de la distribution de charges est un plan d'antisymétrie pour le champ électrique.

→ Réponses **A et B**

• Question 3 : réponse **A**

En coordonnées sphériques, $\vec{E}(P)$ s'écrit :
$$\vec{E}(P) = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, \varphi) \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

P appartient à une infinité de plans de symétrie de la distribution de charges, les plans radiaux d'axe OP , donc, d'après la question précédente :

$$\vec{E}(P) = E(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{e}_r$$

Toute rotation d'angle θ ou φ laisse la distribution de charges invariante, donc : $\vec{E}(P) = E(r) \cdot \vec{e}_r$ et $V(P) = V(r)$.

Les symétries sont « fortes », champ et potentiel sont demandés en tout point : tous les critères convergent vers le choix d'une résolution par le **théorème de Gauss** :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{intérieure à } S}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

La surface de Gauss S sera une sphère de centre O et rayon r orientée vers l'extérieur.

Calculons le flux sortant de $\vec{E}$ à travers S :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = \oiint_S \left(E(r) \cdot \vec{e}_r \right) \cdot \left(dS \cdot \vec{e}_r \right) = \oiint_S E(r) r^2 \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$$

Cette double intégration se fait à r fixe :

$$\Phi = r^2 E(r) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = r^2 E(r) [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi r^2 E(r) \quad (2)$$

Dans cette question, où le point P est à l'extérieur de la boule chargée ($r > a$), la charge intérieure à S est celle calculée à la question 1 :

$$Q_{\text{intérieure à } S} = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3 \quad (3)$$

Donc, d'après (1), (2) et (3) : $4\pi r^2 E_{\text{ext}}(P) = \frac{8\pi \rho_0 a^3}{15\epsilon_0}$

$$\vec{E}_{\text{ext}}(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}$$

→ Réponse **A**



Attention à ne pas confondre le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ avec le rayon vecteur $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$.

Vérifions la validité du résultat obtenu concernant les dimensions :

$$\frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^3} \cdot \|\vec{r}\| \equiv \frac{[\text{C.m}^{-3}] \cdot [\text{m}]^3}{[\text{F.m}^{-1}] \cdot [\text{m}]^3} [\text{m}] \equiv \frac{[\text{C}]}{[\text{F}] \cdot [\text{m}]}$$

La charge q d'un condensateur, sa capacité C et la tension u à ses bornes sont reliées par la relation :

$$q = Cu \quad \text{soit} \quad [C] = [\text{F}] \cdot [\text{V}] \quad \text{et finalement :} \quad \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^3} \cdot \|\vec{r}\| \equiv \frac{[\text{V}]}{[\text{m}]}$$



L'expression de la réponse B, qui s'exprime en [V], est fausse.

• Question 4 : réponse C

Cette question est dans la continuité de la précédente. Cette fois-ci, le point P est à l'intérieur de la boule chargée ($r < a$). La charge intérieure à S est donc celle d'une boule de rayon r :

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{intérieure à } S} &= \iiint_{\substack{\text{boule de} \\ \text{rayon } r}} \rho(r) d\tau \\
 Q_{\text{intérieure à } S} &= \iiint_{\substack{\text{boule de} \\ \text{rayon } r}} \rho_0 \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) \sin \theta dr d\theta d\varphi = \rho_0 \int_0^r \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 Q_{\text{intérieure à } S} &= \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right]_0^r \cdot [-\cos \theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \\
 Q_{\text{intérieure à } S} &= 4\pi \rho_0 r^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \quad (4)
 \end{aligned}$$

Donc, d'après (1), (2) et (4) :

$$\begin{aligned}
 4\pi r^2 E_{\text{int}}(P) &= \frac{4\pi \rho_0 r^3}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \\
 \vec{E}_{\text{int}}(P) &= \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \cdot \vec{e}_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \cdot \vec{r} \quad \rightarrow \text{Réponse C}
 \end{aligned}$$



La réponse D est fautive : elle fait référence au champ électrique créé à l'intérieur d'une sphère chargée uniformément **en surface**, et non pas à l'intérieur d'une boule chargée **en volume**.

• Question 5 : réponse C

V ne dépendant que de r , et le champ électrique étant radial :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \quad \text{se simplifie en} \quad E(r) = -\frac{dV}{dr} \quad \text{soit} \quad V(r) = -\int E(r) dr.$$

Lorsque le point P est à l'extérieur de la boule chargée ($r > a$) :

$$V_{\text{ext}}(P) = -\int E_{\text{ext}}(P) dr$$

et, d'après la question 3 :

$$V_{\text{ext}}(P) = -\int \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r} + K_1$$

À défaut d'indication de l'énoncé, et en l'absence de charge à l'infini, il convient de fixer le potentiel **nul à l'infini**. On en déduit la valeur de la constante d'intégration K_1 :

$$V_{ext}(\infty) = 0 + K_1 = 0 \quad \text{d'où} \quad K_1 = 0.$$

Finalement : $V_{ext}(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0}$ → Réponse **C**



Les expressions des réponses B et D, qui s'expriment en $[V].[m]^{-1}$, sont fausses.

• Question 6 : réponse **A**

Cette question est dans la continuité de la précédente. Cette fois-ci, le point P est à l'intérieur de la boule chargée ($r < a$) :

$$V_{int}(P) = - \int E_{int}(P) dr$$

et, d'après la question 4 :

$$V_{int}(P) = - \int \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) dr = - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) dr = - \frac{\rho_0 r^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{10a^2} \right) + K_2$$



Attention : il n'est pas possible d'écrire $V_{int}(\infty) = 0$, l'intervalle étudié ici ($r < a$) ne s'étendant pas jusqu'à l'infini.

Pour déterminer la constante d'intégration K_2 , on utilise la **continuité du potentiel** sur la surface sphérique de rayon a :

$$\begin{aligned} V_{int}(r = a^-) &= V_{ext}(r = a^+) \\ -\frac{7\rho_0 a^2}{60\epsilon_0} + K_2 &= \frac{2\rho_0 a^2}{15\epsilon_0} \\ K_2 &= \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} \end{aligned}$$

Finalement : $V_{int}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2} \right)$ → Réponse **A**



Dans l'expression de la réponse C, le dernier des trois termes entre parenthèses n'a pas la même dimension que les deux premiers, signe que cette réponse est fausse.

→ QCM 2 Atome d'hydrogène

• Question 1 : réponse **D**

La charge demandée est la somme de la charge du noyau et de la charge volumique contenue dans la boule de centre O et rayon R :

$$Q(R) = e + \iiint_{\substack{\text{boule de} \\ \text{rayon } R}} \rho(r) d\tau$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O , l'élément de volume $d\tau$ s'écrit : $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

En reportant les expressions de $\rho(r)$ et $d\tau$ dans celle de $Q(R)$, on obtient :

$$Q(R) = e + \iiint_{\substack{\text{boule de} \\ \text{rayon } R}} \rho_0 \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = e + \rho_0 \int_0^R r^2 \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}} dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q(R) = e + \iiint_{\substack{\text{boule de} \\ \text{rayon } R}} \rho_0 \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = e + \rho_0 \int_0^R r^2 \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}} dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Effectuons le changement de variable :

$$x = 2\frac{r}{a_0} \quad \text{équivalent à} \quad r = \frac{a_0}{2} x.$$

$$\text{On a alors : } dr = \frac{a_0}{2} dx \quad \text{et} \quad r^2 \cdot e^{-2\frac{r}{a_0}} dr = \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \underbrace{x^2 \cdot e^{-x}}_{g(x)} dx$$

$$\text{et : } Q(R) = e + \rho_0 \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \int_0^{2R/a_0} g(x) dx \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q(R) = e + \rho_0 \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 [G(x)]_0^{2R/a_0} [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$Q(R) = e + \frac{1}{2} \pi a_0^3 \rho_0 \left[G\left(2\frac{R}{a_0}\right) - G(0) \right]$$

$$Q(R) = e + \pi a_0^3 \rho_0 - \pi a_0^3 \rho_0 \left[1 + 2\frac{R}{a_0} + 2\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 \right] \cdot e^{-2\frac{R}{a_0}}$$

→ Réponse **D**



La vérification par un cas particulier s'avère toujours rapide et efficace. Ici, il est évident que l'on doit retrouver $Q(0) = e$. La réponse C, qui donne $Q(0) = e + 3\pi a_0^3 \rho_0$, doit donc être écartée.

• Question 2 : réponse C

La charge totale contenue dans tout l'espace correspond à la limite :

$$Q(\infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} Q(R)$$

Or :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\left[1 + 2 \frac{R}{a_0} + 2 \left(\frac{R}{a_0} \right)^2 \right] \cdot e^{-2 \frac{R}{a_0}} \right] = 0$$

donc :

$$Q(\infty) = e + \pi a_0^3 \rho_0$$

Cette charge est celle de l'atome d'hydrogène, **électriquement neutre**.
D'où :

$$Q(\infty) = e + \pi a_0^3 \rho_0 = 0$$

et finalement :

$$\rho_0 = -\frac{e}{\pi a_0^3}$$

→ Réponse C



ρ_0 , modélisant la charge de l'électron, répartie dans tout l'espace, est forcément négative. a_0 étant une constante positive, les réponses A, B et C pouvaient convenir ($\rho_0 < 0$) tandis que la réponse D devait être écartée ($\rho_0 > 0$).

• Question 3 : réponse A

Soit M un point quelconque de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

$$\vec{E}(M) \text{ s'écrit : } \vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, \varphi) \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad \text{et } V(M) \text{ s'écrit : } V(M) = V(r, \theta, \varphi).$$

M appartient à une infinité de plans de symétrie de la distribution de charges, les plans radiaux d'axe OM . Donc, d'après les propriétés de symétrie vues au QCM 1 :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{e}_r$$

Par ailleurs, ρ ne dépend que de r , ce qui induit les simplifications suivantes :

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \cdot \vec{e}_r \quad \text{et} \quad V(M) = V(r).$$

Les symétries sont « fortes », le champ et le potentiel sont demandés en tout point : on utilise le **théorème de Gauss** :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{intérieure à } S}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

La surface de Gauss S sera une sphère de centre O et rayon r orientée vers l'extérieur.

Calculons le flux sortant de $\vec{E}$ à travers S :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \oiint_S \left(E_r(r) \cdot \vec{e}_r \right) \cdot \left(dS \cdot \vec{e}_r \right) = \oiint_S E_r(r) r^2 \cdot \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Cette double intégration se fait à r fixe :

$$\Phi = r^2 E_r(r) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = r^2 E_r(r) [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi r^2 E_r(r) \quad (2)$$

D'après la question 1 :

$$Q_{\text{intérieure à } S} = Q(r) = e + \pi a_0^3 \rho_0 - \pi a_0^3 \rho_0 \left[1 + 2 \frac{r}{a_0} + 2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right] \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}}$$

et d'après la question 2 :

$$Q_{\text{intérieure à } S} = e + \underbrace{\pi a_0^3 \rho_0}_{-e} - \underbrace{\pi a_0^3 \rho_0}_{-e} \left[1 + 2 \frac{r}{a_0} + 2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right] \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}}$$

$$Q_{\text{intérieure à } S} = e \left[1 + 2 \frac{r}{a_0} + 2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right] \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}} \quad (3)$$

Donc, d'après (1), (2) et (3) :

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{e}{\epsilon_0} \left[1 + 2 \frac{r}{a_0} + 2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right] \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}}$$

$$E_r(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + 2 \frac{r}{a_0} + 2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right] \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}} \quad \rightarrow \text{Réponse A}$$



À cause de la présence de la charge ponctuelle e , le champ électrique créé par l'atome n'est pas défini au point O . Les réponses A, B et C, qui donnent $E_r(0) = \infty$, pouvaient donc convenir, tandis que la réponse D, qui donne la valeur finie $E_r(0) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2}$, devait être écartée.

• Question 4 : réponse B

V ne dépendant que de r , et le champ électrique étant radial :

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad \text{se simplifie en} \quad E_r(r) = -\frac{dV}{dr} \quad (4)$$

Le potentiel électrostatique est donné par l'énoncé :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + K \right) \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}}$$

Calculons le champ électrique à l'aide de la relation (4) :

$$E_r(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + 2 \frac{r}{a_0} + 2 \frac{Kr^2}{a_0} \right) \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}}$$

Identifions cette expression avec le résultat de la question précédente :

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + 2 \frac{r}{a_0} + 2 \frac{Kr^2}{a_0} \right) \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + 2 \frac{r}{a_0} + 2 \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right] \cdot e^{-2 \frac{r}{a_0}}$$

soit :

$$K = \frac{1}{a_0} \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$

• **Question 5 : réponse D**

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron est la somme de son **énergie cinétique** $\mathcal{E}_c$ et de son **énergie potentielle électrostatique** $\mathcal{E}_p$:

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \quad (5)$$

- Pour déterminer $\mathcal{E}_c$, appliquons un PFD dans $\mathcal{R}$ galiléen à l'électron, de masse m_e , soumis à la force d'interaction électrostatique $\vec{F}_e$ exercée par le noyau :

$$\vec{F}_e = m_e \vec{a}$$

La seule composante non nulle du vecteur $\vec{F}_e$, et donc du vecteur $\vec{a}$, est la composante radiale. La projection du PFD sur $\vec{e}_r$ s'écrit :

$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} = -m_e a_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -m_e \frac{v^2}{a_0}$$

d'où :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \quad (6)$$

L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ d'interaction électrostatique de l'électron avec le noyau s'écrit : $\mathcal{E}_p = -eV_n(a_0)$

où $V_n(a_0)$ représente le potentiel créé à la distance a_0 par le noyau ponctuel de charge e placé en O :

$$V_n(a_0) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0}$$

donc :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \quad (7)$$

Attention à ne pas utiliser l'expression de la question 4 qui donne le potentiel électrostatique créé par l'atome, et non celui créé par le noyau.



Finalement, en reportant (6) et (7) dans (5), on obtient :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$$

→ **Réponse D**



Ce résultat a bien la dimension d'une énergie car $\frac{[C]^2}{[F.m^{-1}].[m]} = \frac{[C]^2}{[F]} = [J]$, comme l'indique l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'un condensateur de charge q et de capacité C :

$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

En revanche, l'expression de la réponse C s'exprime en $[J].[m]^{-1}$ et doit être éliminée.

• Question 6 : réponse A

Convertissons l'énergie mécanique en Joule :

$$\mathcal{E}_m = -13,6 \text{ eV} = -13,6 \times 1,6.10^{-19} = -2,18.10^{-18} \text{ J}$$

D'après la question précédente :

$$a_0 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_m} = \frac{(1,6.10^{-19})^2 \times 9.10^9}{2 \times 2,18.10^{-18}} = 5,3.10^{-11} \text{ m} = 53 \text{ pm}$$

→ Réponse A

→ QCM 3 Distribution de charges à symétrie sphérique

• Question 1 : réponse C

Fonctions usuelles et analyse dimensionnelle

Les fonctions trigonométriques (sin, cos, tan), arc trigonométriques (arcsin, arccos, arctan), ch, sh, exponentielle et logarithme népérien :

- s'appliquent à des grandeurs sans dimension ;
- ont pour résultat des grandeurs sans dimension.

Il en résulte que, dans l'expression du potentiel, r/a_0 est sans dimension, donc :

a_0 a la dimension d'une longueur. → Réponse C

Dès lors, le facteur pré exponentiel a la dimension d'un potentiel, ce que l'on vérifie aisément :

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \equiv \frac{[C]}{[F.m^{-1}].[m]} = \frac{[C]}{[F]} = [V]$$

- Les angles font figure de point singulier puisqu'ils ont une unité, le radian, mais pas de dimension, comme l'indique clairement la formule de la surface d'un disque :

$$\underbrace{S}_{[m]^2} = \underbrace{\pi}_{[\emptyset]} \cdot \underbrace{R^2}_{[m]^2}$$

- Attention : le fait que a_0 soit une constante ne signifie aucunement que cette constante soit sans dimension.
Il est impératif d'avoir les idées très claires sur les distinctions qui existent entre variable, paramètre, constante, unité, dimension.

• Question 2 : réponse **D**

Champ électrique et potentiel électrostatique sont reliés par la relation :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O , cette relation s'écrit :

$$\vec{E} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Le potentiel électrostatique ne dépendant que de r , l'écriture se simplifie en :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r} \right) \cdot e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r} \right) \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}$$

→ Réponse **D**



• Question 3 : réponse B

Notons S la surface sphérique de rayon R et centre O , orientée vers l'extérieur. Un vecteur élément de surface s'écrit :

$$d\vec{S} = R^2 \cdot \sin \theta d\theta d\varphi \cdot \vec{e}_r$$

Calculons le flux sortant du champ électrique $\vec{E}$ à travers S :

$$\Phi(R) = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \left(E \cdot \vec{e}_r \right) \cdot \left(dS \cdot \vec{e}_r \right) = \oiint_S E \cdot dS$$

$$\Phi(R) = \oiint_S E(R) \cdot R^2 \cdot \sin \theta d\theta d\varphi = R^2 E(R) \oiint_S \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\Phi(R) = R^2 E(R) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 E(R) [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi R^2 E(R)$$

En remplaçant $E(R)$ par son expression établie à la question précédente, on obtient :

$$\Phi(R) = \frac{q}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{a_0} + 1 \right) \cdot e^{-\frac{R}{a_0}}$$

→ Réponse B

• Question 4 : réponse A

Les limites demandées s'obtiennent sans difficulté :

$$\Phi(0) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Phi(\infty) = 0$$

→ Réponse A

• Question 5 : réponse A

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{intérieure à } S}}{\epsilon_0}$$

D'après les résultats de la question précédente :

- Lorsque S est la surface sphérique de rayon nul :

$$\Phi(0) = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ donc, en vertu du théorème de Gauss: } Q_{\text{intérieure à } S} = q.$$

Cela signifie qu'une charge ponctuelle q est placée en O .

- Lorsque S est la surface sphérique de rayon infini :

$$\Phi(\infty) = 0 \quad \text{donc, en vertu du théorème de Gauss: } Q_{\text{intérieure à } S} = 0$$

Cela signifie que la charge totale dans tout l'espace est nulle, donc qu'une charge $-q$ est répartie dans tout l'espace.

→ Réponse **A**

D'un point de vue physique, l'idée que la distribution de charges étudiée est vraisemblablement celle d'un **atome**, électriquement **neutre**, vient confirmer les résultats obtenus : le noyau, ponctuel et chargé positivement, s'entoure d'un nuage électronique, diffus et de charge opposée à celle du noyau.

• Question 6 : réponse **D**

D'après le **théorème de superposition**, le potentiel $V(r)$ créé par la distribution de charges est la somme du potentiel $V_1(r)$ créé par la charge ponctuelle q placée en O et du potentiel $V_0(r)$ créé par la charge $-q$ répartie dans tout l'espace :

$$V(r) = V_1(r) + V_0(r)$$

Or :

$$V_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

donc :

$$V_0(r) = V(r) - V_1(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(e^{-\frac{r}{a_0}} - 1 \right)$$

→ Réponse **D**

→ QCM 4 Disque chargé

• Question 1 : réponse **C**

Méthodes utilisées en électrostatique pour calculer le champ et le potentiel

- Utiliser le **théorème de Gauss** pour calculer $\vec{E}$, puis $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ pour calculer V , si :
 - 1) **en tout point de l'espace**, le problème présente des symétries « **fortes** » (une seule coordonnée du vecteur champ électrique est non nulle) ;
 - 2) **en tout point de l'espace**, le problème ne dépend que d'une seule variable d'espace ;
 - 3) la distribution de charges est d'extension **infinie**, ou d'extension finie mais à symétrie **sphérique** ;
 - 4) on demande de calculer $\vec{E}$ et V , **en tout point de l'espace**.
- Utiliser le **calcul intégral** en commençant indifféremment par $\vec{E}$ ou V , puis $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ quand cela est possible, si :
 - 5) le problème présente des symétries « **faibles** » (au moins deux coordonnées du champ électrique sont non nulles) ;
 - 6) le problème dépend d'**au moins deux** variables d'espace ;
 - 7) la distribution de charges est d'extension **finie** sans être à symétrie sphérique ;
 - 8) on ne demande de calculer $\vec{E}$ et V **qu'en certains points de l'espace**.

On adoptera ici le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Vérifions que nous sommes dans le cas de figure où les critères 5), 6), 7) et 8) sont réunis.

5) En un point $N(r, \theta, z)$ quelconque de l'espace, le champ électrique s'écrit a priori :

$$\vec{E}(N) = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, z) \\ E_\theta(r, \theta, z) \\ E_z(r, \theta, z) \end{pmatrix}$$

L'étude des symétries fait apparaître des symétries **faibles**. En effet, le point N n'appartient qu'à un seul plan de symétrie de la distribution de charges, le plan $(N, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$. Par conséquent, conformément aux propriétés de symétrie énoncées à la question 2 du QCM 1, $\vec{E}(N)$ s'écrit :

$$\vec{E}(N) = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, z) \\ 0 \\ E_z(r, \theta, z) \end{pmatrix}$$

6) Par ailleurs, toute rotation d'angle θ autour de l'axe Oz laisse la distribution de charges inchangée, donc le problème dépend de **deux** variables d'espace, r et z :

$$\vec{E}(N) = \vec{E}(r, z) = \begin{pmatrix} E_r(r, z) \\ 0 \\ E_z(r, z) \end{pmatrix}$$

7) Le disque est une distribution de charges d'extension **finie** qui ne présente pas de symétrie sphérique.

8) Le champ électrique et le potentiel électrostatique ne sont demandés qu'en tout point $M(0, 0, z)$ de l'axe Oz .

L'utilisation du théorème de Gauss est donc proscrite ici : l'écriture du théorème n'est pas fautive en soi, mais le calcul du flux s'avère rigoureusement impraticable !

La charge totale Q est uniformément répartie sur la surface du disque d'aire $S = \pi a^2$, ce qui correspond à une densité surfacique de charges uniforme :

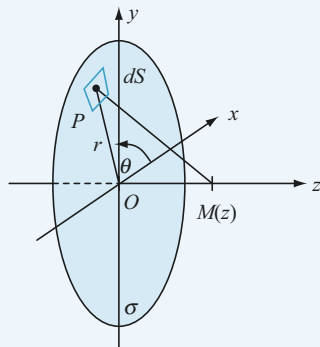
$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$$

En modélisation surfacique, le potentiel $V(M)$ s'écrit :

$$V(M) = V(z) = \iint_{\text{disque}} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

où $P(r, 0, 0)$ est un point quelconque de la surface du disque, et $dS = r dr d\theta$ un petit élément de surface centré sur le point P (cf. figure ci-contre).

On a alors : $PM = \sqrt{r^2 + z^2}$.



En reportant σ , dS et PM dans l'expression du potentiel, on obtient :

$$\begin{aligned}
 V(z) &= \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 a^2} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 V(z) &= \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 a^2} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^a \cdot [\theta]_0^{2\pi} \\
 V(z) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2} \right) \\
 V(z) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2}} \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Dans cette question où z est positif :

$$\sqrt{\frac{z^2}{a^2}} = \frac{z}{a} \quad \text{donc} \quad V_1(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} - \frac{z}{a} \right)$$

→ Réponse **C**

Attention : l'expression intégrale du potentiel utilisée plus haut n'est applicable qu'à des distributions de charges d'extension finie, et sous-entend que le potentiel est nul à l'infini.



Lorsque $z \rightarrow +\infty$, le potentiel de la question C est le seul qui tende vers **zéro**. Ceux des réponses B et D tendent vers l'infini et doivent donc être éliminés.

Quant au potentiel de la réponse A, il n'est pas défini pour $z > a$, donc faux.

• Question 2 : réponse **A**

Dans cette question où z est négatif :

$$\sqrt{\frac{z^2}{a^2}} = -\frac{z}{a}$$

L'expression (1) du potentiel établie à la question précédente se transforme alors pour donner :

$$V_2(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} + \frac{z}{a} \right)$$

→ Réponse **A**



Lorsque $z \rightarrow -\infty$, le potentiel de la question A est le seul qui tende vers **zéro**. Ceux des réponses C et D tendent vers l'infini et doivent donc être éliminés.

Quant au potentiel de la réponse B, il n'est pas défini pour $z < -a$, donc faux.

• Question 3 : réponse **B**

On utilise la relation différentielle liant $\vec{E}$ à V :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Dans cette question où z est positif :

$$\vec{E}_1(z) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_1(z) = -\frac{dV_1}{dz} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_1(z) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{z/a^2}{\sqrt{1+z^2/a^2}} - \frac{1}{a} \right) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_1(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(-\frac{z/a}{\sqrt{1+z^2/a^2}} + 1 \right) \cdot \vec{e}_z$$

→ Réponse **B**



Lorsque $z \rightarrow +\infty$, le champ électrique de la réponse B tend vers zéro, ce qui est légitime puisque le disque chargé qui crée ce champ est à une distance infinie. En revanche, le champ électrique de la réponse C tend vers la valeur finie non nulle $-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot \vec{e}_z$ et s'exprime en [V] et non pas en [V].[m]⁻¹ : il doit être éliminé.

Quant aux champs des réponses A et D, ils ne sont pas définis pour $z > a$, donc faux.

• Question 4 : réponse **D**

Dans cette question où z est négatif :

$$\vec{E}_2(z) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_2(z) = -\frac{dV_2}{dz} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_2(z) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{z/a^2}{\sqrt{1+z^2/a^2}} + \frac{1}{a} \right) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_2(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(-\frac{z/a}{\sqrt{1+z^2/a^2}} - 1 \right) \cdot \vec{e}_z \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$



Lorsque $z \rightarrow -\infty$, le champ électrique de la réponse D tend vers zéro, ce qui est légitime puisque le disque chargé qui crée ce champ est à une distance infinie. En revanche, le champ électrique de la réponse B tend vers la valeur finie non nulle $\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot \vec{e}_z$ et s'exprime en [V] et non pas en [V].[m]⁻¹ : il doit être éliminé.

Quant aux champs des réponses A et C, ils ne sont pas définis pour $z < -a$, donc faux.

• Question 5 : réponse D

Pour $\epsilon > 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{E}_1(\epsilon) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \vec{E}_2(-\epsilon) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z$$

donc :

$$\delta \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z - \left(-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z \right) = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$

On sait que la traversée d'une surface chargée s'accompagne toujours d'une discontinuité de la composante normale du champ électrique, discontinuité qui vaut ici :

$$\delta \vec{E} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\vec{E}_1(\epsilon) - \vec{E}_2(-\epsilon) \right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_z = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \vec{e}_z \quad \text{conforme au résultat obtenu.}$$

• Question 6 : réponse A

Continuité ou discontinuité du champ électrique ?

- En tout point où est placée une charge **condensée** (surfactive, linéique ou ponctuelle), le champ électrique n'est **pas défini**. En présence d'une charge surfactive, il y a **discontinuité** du champ.
- En tout autre point (vide de charge, ou présence d'une charge volumique), le champ électrique est **défini et continu**.

Lors du passage du point M_1 au point M_2 quand $\epsilon \rightarrow 0$, il n'y a plus traversée de la surface chargée en O , l'espace considéré étant vide de charge, donc le champ électrique est **continu**.

Par conséquent :

$$\delta \vec{E}_0 = \vec{0}$$

→ Réponse **A**

→ QCM 5 Solénoïde

• Question 1 : réponses **A et B**

Propriétés de symétrie et d'antisymétrie en magnétostatique

- 1) Si un point M appartient à un plan de symétrie de la distribution de courants, le champ $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan de symétrie.
- 2) Si un point M appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, le champ $\vec{B}(M)$ est contenu ce plan d'antisymétrie.
- 3) Un plan de symétrie de la distribution de courants est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique.
- 4) Un plan d'antisymétrie de la distribution de courants est un plan de symétrie pour le champ magnétique.

Attention : les propriétés du champ magnétique sont inversées par rapport à celles du champ électrique énoncées à la question 2 du QCM 1. Ceci est dû à la présence du produit vectoriel dans l'expression de Biot et Savart du champ magnétique.



On adoptera ici le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

- En un point $M(0, 0, z)$ quelconque de l'axe Oz , le champ magnétique s'écrit a priori :

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} B_r(z) \\ B_\theta(z) \\ B_z(z) \end{pmatrix}$$

Le point M appartient à une infinité de plans d'antisymétrie de la distribution de courants, les plans radiaux ayant en commun l'axe Oz . Par conséquent, conformément à la propriété 2 énoncée ci-dessus, $\vec{B}(M)$ est **contenu** dans tous ces plans, donc dans leur intersection, réduite à l'axe Oz :

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(z) \end{pmatrix} : \text{ la réponse A est vraie.}$$

- En un point $N(r, \theta, 0)$ quelconque du plan xOy , le champ magnétique s'écrit a priori :

$$\vec{B}(N) = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta) \\ B_\theta(r, \theta) \\ B_z(r, \theta) \end{pmatrix}$$

Le plan xOy est plan de symétrie de la distribution de courants. Par conséquent, conformément à la propriété 1 énoncée ci-dessus, $\vec{B}(N)$ est **orthogonal** au plan xOy :

$$\vec{B}(N) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(r, \theta) \end{pmatrix}$$

La réponse B est vraie.

En un point $Q(r, \theta, z)$ quelconque de l'espace, le champ magnétique s'écrit a priori :

$$\vec{B}(Q) = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta, z) \\ B_\theta(r, \theta, z) \\ B_z(r, \theta, z) \end{pmatrix}$$

Le point Q n'appartient qu'à un seul plan d'antisymétrie de la distribution de courants, le plan $(Q, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$. Par conséquent, conformément à la propriété 2 énoncée ci-dessus, $\vec{B}(Q)$ est **contenu** dans ce plan :

$$\vec{B}(Q) = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta, z) \\ 0 \\ B_z(r, \theta, z) \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, toute rotation d'angle θ autour de l'axe Oz laisse la distribution de courants inchangée, donc le problème dépend de deux variables d'espace, r et z :

$$\vec{B}(Q) = \begin{pmatrix} B_r(r, z) \\ 0 \\ B_z(r, z) \end{pmatrix}$$

Le champ magnétique étant **continu** dans le vide (hors traversée de nappes de courants), le résultat précédent établit clairement que le champ magnétique ne peut pas être uniforme en tout point de l'espace, ni nul à l'extérieur du solénoïde.

→ Réponses A et B

Les réponses C et D sont vraies dans le cas du solénoïde **infiniment long**.



• Question 2 : réponse C

Méthodes utilisées en magnétostatique pour calculer le champ magnétique

- Utiliser le **théorème d'Ampère**, si
 - 1) **en tout point de l'espace**, le problème présente des symétries « **fortes** » (une seule coordonnée du vecteur champ magnétique est non nulle);
 - 2) **en tout point de l'espace**, le problème ne dépend que d'une seule variable d'espace;
 - 3) la distribution de courants est d'extension **infinie**;
 - 4) on demande de calculer $\vec{B}$ **en tout point de l'espace**.
- Utiliser le **calcul intégral** (relation de Biot et Savart) si :
 - 5) le problème présente des symétries « **faibles** » (au moins deux coordonnées du champ magnétique sont non nulles);
 - 6) le problème dépend d'**au moins deux** variables d'espace;
 - 7) la distribution de courants est d'extension **finie**;
 - 8) Si on ne demande de calculer $\vec{B}$ **qu'en certains points de l'espace**.

Vérifions que nous sommes dans le cas de figure où les critères 5), 6), 7) et 8) sont réunis.

5) et 6) En un point $Q(r, \theta, z)$ quelconque de l'espace, le champ magnétique s'écrit, d'après la question précédente :

$$\vec{B}(Q) = \begin{pmatrix} B_r(r, z) \\ 0 \\ B_z(r, z) \end{pmatrix}$$

Les symétries sont donc **faibles**, et le problème dépend de **deux** variables d'espace.

7) Le solénoïde est une distribution de courants d'extension **finie**.

8) Le champ magnétique n'est demandé qu'en tout point M de l'axe Oz .

On utilise donc le calcul intégral.

La relation de Biot et Savart s'écrit ici sous la forme d'une intégrale linéique :

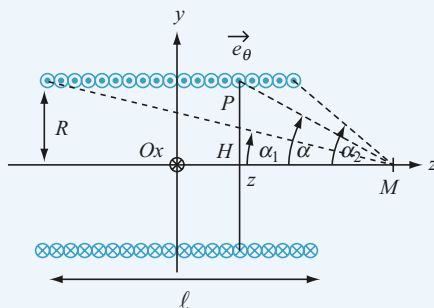
$$\vec{B}(M) = \oint_{\substack{\text{spire de} \\ \text{cote } z}} \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}$$

où $P(R, \theta, z)$ est un point quelconque de la spire de cote z , et $I d\vec{\ell} = IR d\theta \cdot \vec{e}_\theta$ un petit élément de courant centré sur le point P (cf. figure ci-contre).

On a alors :

$$\vec{PM} = \vec{PH} + \vec{HM} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ z_M - z \end{pmatrix}$$

$$I d\vec{\ell} \wedge \vec{PM} = I \begin{pmatrix} 0 \\ R d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ z_M - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IR(z_M - z) d\theta \\ 0 \\ IR^2 d\theta \end{pmatrix}$$



L'étude des symétries effectuée à la question 1 a établi que $\vec{B}(M) = B(M) \cdot \vec{e}_z$. Or, la décomposition du vecteur unitaire mobile $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne fixe n'a pas de composante suivant $\vec{e}_z$: $\vec{e}_r = \cos\theta \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \cdot \vec{e}_y$.

Il s'en suit que la composante radiale du produit vectoriel ne sera pas retenue, et que l'intégrale s'écrit plus simplement :

$$\vec{B}(M) = \oint_{\text{spire de cote } z} \frac{\mu_0 IR^2 \cdot \vec{e}_z}{4\pi PM^3} d\theta$$

Par ailleurs : $PM = \frac{R}{\sin \alpha}$ soit, en reportant :

$$\vec{B}(M) = \oint_{\text{spire de cote } z} \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z \right) d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z$$

→ Réponse **C**



Lorsque l'on s'éloigne, sur l'axe Oz , du solénoïde source du champ magnétique, l'intensité du champ décroît. Or, la réponse B propose un champ fonction de $\cos^3 \alpha$, qui croît donc à mesure que α diminue : cette réponse doit être écartée.

• Question 3 : réponse **D**

On a : $\cotan \alpha = \frac{z_M - z}{R}$

Cette relation se différencie, à (α, z) variables et (z_M, R) constants, pour donner :

$$-\frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} = -\frac{dz}{R}$$

soit : $dz = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$

→ Réponse **D**

La méthode choisie, qui consistait à exprimer $\cotan \alpha$, est la plus simple. On arrive bien sûr au même résultat en partant des expressions de $\sin \alpha$, de $\cos \alpha$ ou de $\tan \alpha$, pour peu que l'on maîtrise les fonctions trigonométriques et leurs dérivées.



• Question 4 : réponse **B**

- Le solénoïde de longueur ℓ comporte N spires.
- 1 mètre de solénoïde suivant l'axe Oz comporte donc $\frac{N}{\ell}$ spires.

Un élément de longueur dz de solénoïde comporte alors $\frac{N}{\ell} dz$ spires, d'où la relation :

$$dN = \frac{N}{\ell} dz$$

→ Réponse **B**



La réponse A est la seule à ne pas être conforme du point de vue de l'homogénéité, puisqu'elle donne : $[\emptyset] = [\text{m}]^2$.

• Question 5 : réponse A

- Il a été établi à la question 2 que la spire de cote z crée en M le champ magnétique :

$$\vec{B}_{spire}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z$$

- D'après la question 4, le solénoïde élémentaire de cote z et longueur dz comporte $dN = \frac{N}{\ell} dz$ spires et crée donc en M le champ magnétique :

$$d\vec{B}(M) = \left(\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z \right) dN = \left(\frac{\mu_0 NI}{2R\ell} \sin^3 \alpha \cdot \vec{e}_z \right) dz$$

soit encore, d'après la question 3 : $d\vec{B}(M) = \left(\frac{\mu_0 NI}{2\ell} \sin \alpha \cdot \vec{e}_z \right) d\alpha$

- Le champ magnétique créé en M par l'ensemble du solénoïde s'obtient alors par sommation intégrale :

$$\vec{B}(M) = \int_{\text{solénoïde}} \left(\frac{\mu_0 NI}{2\ell} \sin \alpha \cdot \vec{e}_z \right) d\alpha = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} \cdot \vec{e}_z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} \cdot \vec{e}_z [-\cos \alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \cdot \vec{e}_z$$

→ Réponse A

• Question 6 : réponse B

Le nombre n de spires par unité de longueur suivant l'axe Oz est donné par la relation de la question 4 : $n = \frac{dN}{dz} = \frac{N}{\ell}$

Dès lors, d'après la question précédente, le champ magnétique créé en tout point M de l'axe Oz par le solénoïde de longueur finie s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \cdot \vec{e}_z$$

Le champ magnétique créé en tout point M de l'axe Oz par le solénoïde infini se déduit du résultat précédent par passage à la limite :

- $\alpha_1 \rightarrow 0$ donc $\cos \alpha_1 \rightarrow 1$
- $\alpha_2 \rightarrow \pi$ donc $\cos \alpha_2 \rightarrow -1$

Finalement : $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \cdot \vec{e}_z$ → Réponse **B**

→ QCM 6 Bobine torique à section carrée

• Question 1 : réponses **A et C**

On adoptera ici le système de coordonnées cylindriques (r, θ, y) .

- Tout plan méridien du bobinage, c'est-à-dire tout plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_y)$, est plan de symétrie de la distribution de courants.
- Par conséquent, en vertu de la propriété 3 énoncée à la question 1 du QCM 5, tout plan méridien du bobinage est plan d'antisymétrie pour le champ magnétique.

→ Réponses **A et C**

• Question 2 : réponse **A**

En un point $M(r, \theta, y)$ quelconque situé à l'intérieur de la bobine, le champ magnétique s'écrit a priori :

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} B_r(r, \theta, y) \\ B_\theta(r, \theta, y) \\ B_y(r, \theta, y) \end{pmatrix}$$

Le plan méridien $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_y)$ est plan de symétrie de la distribution de courants. Donc, en vertu de la propriété 1 énoncée à la question 1 du QCM 5, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan :

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_\theta(r, \theta, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, les lignes de champ du champ magnétique sont des cercles d'axe Oy .

→ Réponse **A**

• Question 3 : réponse B

Complétons l'étude des symétries de la question précédente par une étude des invariances.

Toute rotation d'angle θ autour de l'axe Oy laisse la distribution de courants inchangée, donc le problème dépend de deux variables d'espace, r et y :

$$\vec{B}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_\theta(r, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

En réalité, comme nous le verrons plus loin, $\vec{B}(M)$ ne dépend pas de la variable y lorsqu'on se limite à le calculer **à l'intérieur du tore**, ce qui nous ramène à un problème **monovariant**.

Par ailleurs, la distribution de courants est certes d'extension finie, mais la symétrie de révolution du tore empêche tout effet de bord.

En définitive, et en dépit des apparences, nous sommes bien dans les conditions de l'application du théorème d'Ampère. Au demeurant, le calcul du champ magnétique par Biot et Savart s'avère totalement impraticable.

Théorème d'Ampère de la magnétostatique

Soit C un contour (= courbe fermée) orienté quelconque, et soit S une surface s'appuyant sur C et orientée en conformité avec C par la normale d'Ampère $\vec{n}$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{total}$$

où I_{total} désigne l'intensité **algébrique** totale du courant traversant S dans le sens de $\vec{n}$.

Considérant que $\vec{B}(M)$ est colinéaire à $\vec{e}_\theta$ et que sa norme ne dépend pas de θ , il convient de choisir comme contour C un cercle d'axe Oy et rayon r ($R - a/2 < r < R + a/2$), orienté dans le sens de $\vec{e}_\theta$.

$$\bullet \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \left[B(r, y) \vec{e}_\theta \right] \cdot \left[r d\theta \vec{e}_\theta \right] = \oint_C r B(r, y) d\theta = r B(r, y) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B(r, y)$$

- Le disque S de rayon r est orienté suivant $\vec{e}_y$, et traversé par n fils parcourus par des courants dirigés suivant $\vec{e}_y$, donc : $I_{total} = nI$

Par application du théorème d'Ampère, on obtient la norme du champ magnétique qui règne en un point $M(x, y)$ quelconque du plan xOy à l'intérieur du tore :

$$2\pi r B(r, y) = \mu_0 n I \quad \text{soit} \quad B(r) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \quad (1)$$

et finalement puisque, dans le plan xOy , $r = x$:

$$B(x) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi x}$$

→ Réponse **B**



Attention : $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ hors du plan xOy , et $r = x$ dans le plan xOy .
Mais $r \neq \sqrt{x^2 + y^2}$, et les réponses A et D doivent être éliminées.

• Question 4 : réponse **A**

Le flux φ du champ magnétique à travers la surface d'une spire dont la normale est orientée dans le sens du champ s'écrit :

$$\varphi = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

En coordonnées cylindriques, d'après l'expression (1) du champ magnétique :

$$\iint_{\text{spire}} \left(B(r) \cdot \vec{e}_\theta \right) \cdot \left(dS \cdot \vec{e}_\theta \right) = \iint_{\text{spire}} \left(\frac{\mu_0 n I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\theta \right) \cdot \left(dr dy \cdot \vec{e}_\theta \right)$$

$$\varphi = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} \int_{R-a/2}^{R+a/2} \frac{dr}{r} \int_{-a/2}^{+a/2} dy$$

$$\varphi = \frac{\mu_0 n I}{2\pi} [\ln r]_{R-a/2}^{R+a/2} \cdot [y]_{-a/2}^{+a/2}$$

$$\varphi = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a/2}{R-a/2} \right) = \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \ln \left(\frac{2R+a}{2R-a} \right)$$

→ Réponse **A**

• Question 5 : réponse A

Reprenons l'expression (1) du champ magnétique :

$$B(r) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}$$

On a :

$$\bullet B_{\max} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi(R - a/2)} = \frac{\mu_0 n I}{\pi(2R - a)}$$

$$\bullet B_{\min} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi(R + a/2)} = \frac{\mu_0 n I}{\pi(2R + a)}$$

Dès lors :

$$2 \cdot \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\max} + B_{\min}} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2R - a} - \frac{1}{2R + a}}{\frac{1}{2R - a} + \frac{1}{2R + a}}$$

$$2 \cdot \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\max} + B_{\min}} = 2 \cdot \frac{(2R + a) - (2R - a)}{(2R + a) + (2R - a)}$$

$$2 \cdot \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\max} + B_{\min}} = 2 \cdot \frac{2a}{4R} = \frac{a}{R}$$

Donc $2 \cdot \frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\max} + B_{\min}} = 10\% = 0,100$ si et seulement si :

$$\frac{a}{R} = 0,100$$

→ Réponse A

chapitre 6

Annales 2009

	énoncés	corrigés
• Préambule	222	
• QCM 1 : Filtre passif	222	233
• QCM 2 : Ressort	224	236
• QCM 3 : Sphère creuse chargée	226	239
• QCM 4 : Lunette astronomique	228	243
• QCM 5 : Machine de Stirling	229	248
• QCM 6 : Circuit rLD en régime stationnaire	231	251

Préambule

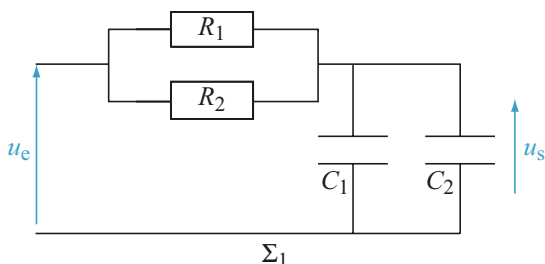
Ce dernier chapitre présente l'intégralité des QCM de Physique proposés aux épreuves d'admissibilité du concours de recrutement d'élèves pilote de ligne de l'ENAC année 2009. Elle va vous permettre de vous tester dans les conditions réelles du concours, qui sont les suivantes.

- La durée de l'épreuve est de **deux heures**.
- L'épreuve comporte 36 questions, regroupées en blocs indépendants de 6 questions liées, clairement identifiées comme telles.
- Chaque candidat doit choisir au plus **24 questions** parmi les 36 proposées. Il est inutile de répondre à plus de 24 questions, le correcteur automatique à lecture optique ne corrigeant que les 24 premières réponses auxquelles le candidat a répondu, quelle que soit la teneur de ces réponses.
- Chaque question propose 4 possibilités de réponse : A, B, C ou D.
- Chaque question comporte exactement zéro, une ou deux réponse(s) exacte(s).

À vous de jouer !

→ QCM 1 Filtre passif

• Question 1



Le système électronique Σ_1 (figure ci-contre) comporte deux résistors de résistances $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ainsi que deux condensateurs de capacités $C_1 = 200 \text{ nF}$ et $C_2 = 50 \text{ nF}$. On applique en entrée de Σ_1 la tension sinusoïdale

$u_e(t) = u_{e,m} \cdot \cos(\omega t)$, et on recueille en sortie la tension $u_s(t) = u_{s,m} \cdot \cos(\omega t + \phi)$; les grandeurs $u_{e,m}$, $u_{s,m}$, ω et ϕ sont indépendantes du temps.

Le filtre Σ_1 se comporte :

- A** comme un passe-bas du premier ordre.
- B** comme un passe-haut du premier ordre.
- C** comme un passe-bas du deuxième ordre.
- D** comme un passe-haut du deuxième ordre.

• Question 2

Déterminer la pulsation ω_c de coupure à -3 dB de Σ_1 .

A $\omega_c = \frac{1}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)}$

B $\omega_c = \frac{C_1 + C_2}{(R_1 + R_2)C_1C_2}$

C $\omega_c = \frac{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)}{R_1R_2C_1C_2}$

D $\omega_c = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2(C_1 + C_2)}$

• Question 3

En déduire la fréquence f_c de coupure à -3 dB de Σ_1 .

A $f_c = 212$ Hz

B $f_c = 955$ Hz

C $f_c = 6,0$ kHz

D $f_c = 37,7$ kHz

• Question 4

Calculer ϕ pour $\omega = 2\omega_c$.

A $\phi = -1,1^\circ$

B $\phi = 0,46^\circ$

C $\phi = -26,6^\circ$

D $\phi = -63,4^\circ$

• Question 5

Exprimer la puissance moyenne P dissipée dans le résistor de résistance R_1 lorsque $\omega = \omega_c$.

A $P = \frac{u_{e,m}^2}{4R_2}$

B $P = \frac{u_{e,m}^2}{4R_1}$

C $P = \frac{u_{e,m}^2}{2R_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2$

D $P = \frac{u_{e,m}^2}{2R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2$

• Question 6

Calculer la durée τ pendant laquelle le résistor de résistance R_1 dissipe une énergie totale de 1 J, si $u_{e,m} = 2$ V.

A $\tau = 1$ ms

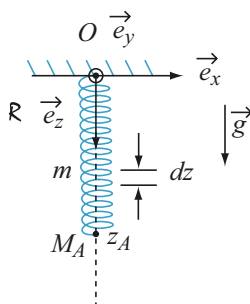
B $\tau = 3$ min 42 s

C $\tau = 16$ min 40 s

D $\tau = 3,4$ ms

→ QCM 2 Ressort

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé galiléen, une masselotte A que l'on assimile à un point matériel de masse $M = 200 \text{ g}$ est fixée à l'extrémité d'un ressort de masse m , de raideur $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$ et de longueur à vide L_0 , disposé verticalement comme le montre la figure ci-dessous. L'autre extrémité O du ressort est fixe dans $\mathcal{R}$, car solidaire d'un bâti. On désigne par $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_z$ où $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$ le champ de pesanteur terrestre.



• Question 1

En négligeant tout frottement et en supposant $m = 0$, exprimer la période T_0 des oscillations de la masselotte lorsque cette dernière est mise en mouvement.

A $T_0 = 2\pi \left(\frac{L_0}{g} \right)^{1/2}$

B $T_0 = \left(\frac{L_0}{g} \right)^{1/2}$

C $T_0 = 2\pi \left(\frac{M}{k} \right)^{1/2}$

D $T_0 = \left(\frac{k}{M} \right)^{1/2}$

• Question 2

En négligeant tout frottement et en supposant $m = 0$, déterminer l'allongement ΔL du ressort lorsque la masselotte occupe sa position d'équilibre.

A $\Delta L = 9,80 \text{ cm}$

B $\Delta L = 19,6 \text{ cm}$

C $\Delta L = 5,10 \text{ cm}$

D $\Delta L = 44,2 \text{ cm}$

• Question 3

Afin d'étudier l'influence de la masse m du ressort sur la pulsation des oscillations, on considère à l'instant t une tranche τ infinitésimale du ressort, de cote z , de masse dm , d'épaisseur dz et de vitesse $\vec{v}(z) = (z/z_A)\vec{v}_A$, $\vec{v}_A = v_A \cdot \vec{e}_z$ étant la vitesse de A et z_A la cote de A (cf. figure précédente). Exprimer l'énergie cinétique $d\mathcal{E}_k^\tau$ de τ .

A $d\mathcal{E}_k^\tau = \frac{mz^2v_A^2}{2z_A^3}dz$

B $d\mathcal{E}_k^\tau = \frac{mz^2v_A^2}{z_A^3}dz$

C $d\mathcal{E}_k^\tau = \frac{2mz^2v_A^2}{z_A^3}dz$

D $d\mathcal{E}_k^\tau = \frac{mzv_A^2}{2z_A^2}dz$

• Question 4

En déduire, en intégrant sur toutes les tranches élémentaires du ressort, l'énergie cinétique totale $\mathcal{E}_k^\tau$ du ressort.

A $\mathcal{E}_k^\tau = \frac{mv_A^2}{3}$

B $\mathcal{E}_k^\tau = \frac{mv_A^2}{6}$

C $\mathcal{E}_k^\tau = 2mv_A^2$

D $\mathcal{E}_k^\tau = \frac{mv_A^2}{4}$

• Question 5

En admettant la conservation de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du ressort et de la masselotte : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k^\tau + \mathcal{E}_k^A + \mathcal{E}_p$, où $\mathcal{E}_k^A = (1/2)Mv_A^2$ est l'énergie cinétique de A et $\mathcal{E}_p = (1/2)k(z_A - L_0)^2$ l'énergie potentielle élastique du ressort, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{dz_A}{dt}\right)^2 + \omega^2(z_A - L_0)^2 = C$$

où C est une grandeur indépendante du temps.

Quelle est l'expression de ω ?

A $\omega = \left(\frac{k}{M+m}\right)^{1/2}$

B $\omega = \left(\frac{k}{M/3+m}\right)^{1/2}$

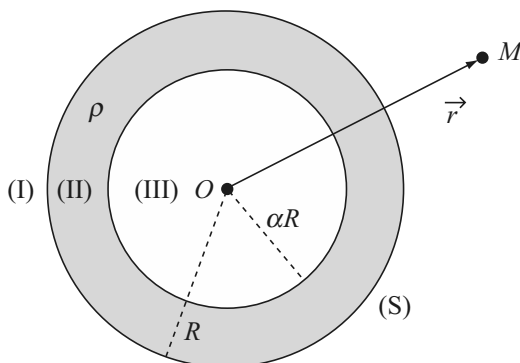
C $\omega = \left(\frac{k}{(M+m)/2}\right)^{1/2}$

D $\omega = \left(\frac{k}{M+m/3}\right)^{1/2}$

→ QCM 3 Sphère creuse chargée

• Question 1

Une sphère creuse (S), de centre O , de rayon extérieur R et de rayon intérieur αR ($\alpha < 1$), est électriquement chargée en volume avec une charge volumique uniforme ρ (cf. figure ci-dessous). On repère un point M de l'espace par son vecteur position $\vec{r} = \vec{OM} = r \cdot \vec{e}_r$ où $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{e}_r = \vec{OM} / r$. ϵ_0 désigne la permittivité du vide.



Calculer le champ électrostatique $\vec{E}_I(r)$ produit par (S) dans la région (I) définie par $r > R$.

A $\vec{E}_I(r) = (1 - \alpha) \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$

B $\vec{E}_I(r) = (1 - \alpha^3) \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$

C $\vec{E}_I(r) = (1 - \alpha) \frac{\rho R^3}{6\pi r^2 \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$

D $\vec{E}_I(r) = \alpha^3 \frac{\rho R^3}{r^2 \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$

• Question 2

Exprimer le champ électrostatique $\vec{E}_{II}(r)$ produit par (S) dans la région (II) définie par $\alpha R < r < R$.

A $\vec{E}_{II}(r) = -\frac{\alpha^3 \rho R^2}{3r \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$

B $\vec{E}_{II}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$

C $\vec{E}_{II}(r) = \vec{0}$

D $\vec{E}_{II}(r) = \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{\alpha^3 \rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \right) \cdot \vec{e}_r$

• Question 3

En déduire le potentiel électrostatique $V_I(r)$ de la région (I) en choisissant son origine à l'infini.

A $V_I(r) = \alpha^3 \frac{\rho R^3}{r\epsilon_0}$

B $V_I(r) = (\alpha^3 - 1) \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0}$

C $V_I(r) = (1 - \alpha) \frac{\rho R^3}{6\pi r\epsilon_0}$

D $V_I(r) = (1 - \alpha^3) \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0}$

• Question 4

Quelle est l'expression du potentiel électrostatique $V_{III}(r)$ de la région (III) définie par $r < \alpha R$?

A $V_{III}(r) = (1 - \alpha^2) \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$

B $V_{III}(r) = (1 - \alpha^3) \frac{\rho R^2}{\epsilon_0}$

C $V_{III}(r) = (1 - \alpha^3) \frac{\rho R}{4\pi\epsilon_0}$

D $V_{III}(r) = \alpha^2 \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$

• Question 5

Lorsque $1 - \alpha \ll 1$, (S) devient une coquille sphérique de faible épaisseur, que l'on assimile à une sphère de rayon R , uniformément chargée en surface, de charge surfacique σ . Exprimer σ .

A $\sigma = \frac{(1 - \alpha) R \rho}{3}$

B $\sigma = 3(1 - \alpha) R \rho$

C $\sigma = (1 - \alpha) R \rho$

D $\sigma = \alpha \rho R^3$

• Question 6

Dans l'hypothèse de la question précédente ($1 - \alpha \ll 1$), déterminer la différence de potentiel $U = V_I(R) - V_{III}(0)$.

A $U = \frac{\sigma}{\epsilon_0 R}$

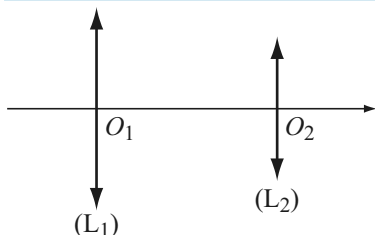
B $U = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

C $U = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R}$

D $U = 0$

→ QCM 4 Lunette astronomique

• Question 1



La lunette astronomique représentée sur la figure ci-contre est constituée des deux lentilles minces convergentes (L_1) et (L_2), respectivement assimilées à un objectif et à un oculaire de distances focales images $f'_1 = 115$ mm et $f'_2 = 20$ mm.

L'oculaire est placé de telle sorte que l'instrument soit afocal.

Exprimer le grandissement angulaire G_a de la lunette.

A $G_a = -\frac{f'_2}{f'_1}$

B $G_a = -\frac{f'_1}{f'_2}$

C $G_a = \frac{f'_1}{f'_2} - 1$

D $G_a = 1 - \frac{f'_2}{f'_1}$

• Question 2

La limite de résolution angulaire de l'œil étant de 1,5 minute d'arc (notation 1,5'), quel doit être l'écart angulaire θ_m minimal entre deux étoiles, afin qu'elles apparaissent séparées à travers la lunette ?

A $\theta_m = 0,32'$

B $\theta_m = 3,8'$

C $\theta_m = 1,2'$

D $\theta_m = 0,26'$

• Question 3

À quelle distance p'_1 de O_2 trouve-t-on l'image de O_1 par (L_2) ?

A $p'_1 = 5,21$ mm

B $p'_1 = 17,4$ mm

C $p'_1 = 23,5$ mm

D $p'_1 = 7,35$ mm

• Question 4

Le diamètre de la monture circulaire de (L_1) est de 4 cm. Quel est le diamètre D'_1 de l'image de la monture de (L_1) par (L_2) ?

A $D'_1 = 2,6$ mm

B $D'_1 = 3,8$ mm

C $D'_1 = 5,1$ mm

D $D'_1 = 7,0$ mm

• Question 5

La lunette est désormais utilisée pour observer un objet situé à 50 m de (L_1). De quelle distance d faut-il déplacer l'oculaire pour obtenir une image nette de l'objet à travers l'instrument ?

- A** $d = 0,02$ mm **B** $d = 0,09$ mm **C** $d = 0,19$ mm **D** $d = 0,27$ mm

• Question 6

On retire (L_2) puis on place un photodétecteur dans le plan focal image de (L_2). Le diamètre apparent de la galaxie d'Andromède, assimilée à un objet optique circulaire situé à l'infini, étant de $2,5^\circ$, quel est le diamètre D' de l'image de cette galaxie dans le plan focal image de (L_1) ?

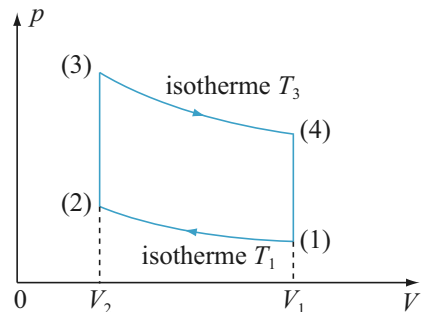
- A** $D' = 5,0$ mm **B** $D' = 7,0$ mm **C** $D' = 12,5$ mm **D** $D' = 3,5$ mm

→ QCM 5 Machine de Stirling

• Question 1

Une mole de gaz supposé parfait est utilisée comme fluide caloporteur dans une machine de Stirling. Le gaz subit au cours d'un cycle les transformations suivantes (cf. figure ci-contre) :

- (1) $\rightarrow$ (2) une compression isotherme réversible à la température $T_1 = 500$ K, du volume V_1 au volume $V_2 = \beta V_1$ où $\beta = 0,2$;
- (2) $\rightarrow$ (3) une transformation isochore ;
- (3) $\rightarrow$ (4) une détente isotherme réversible du volume V_2 au volume V_1 , à la température $T_3 = 1\,200$ K ;
- (4) $\rightarrow$ (1) une transformation isochore.



Le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants vaut $\gamma = c_p / c_v = 1,4$. On note $R \approx 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ la constante des gaz parfaits. Préciser les caractéristiques du cycle.

- A** Le cycle est moteur.
- B** Le cycle est un cycle de Carnot.
- C** Le cycle est celui d'un réfrigérateur ou d'une pompe à chaleur.
- D** La variation d'entropie du gaz est nulle au cours d'un cycle.

• Question 2

Exprimer le travail $W_{3 \rightarrow 4}$ reçu par le gaz lors de la transformation (3) $\rightarrow$ (4).

- A** $W_{3 \rightarrow 4} = RT_3 (\beta - 1)$
- B** $W_{3 \rightarrow 4} = \beta RT_3$
- C** $W_{3 \rightarrow 4} = RT_3 (1 - \ln \beta)$
- D** $W_{3 \rightarrow 4} = RT_3 \ln \beta$

• Question 3

En déduire la chaleur $Q_{3 \rightarrow 4}$ reçue par le gaz lors de la transformation (3) $\rightarrow$ (4).

- A** $Q_{3 \rightarrow 4} = 16 \text{ kJ}$
- B** $Q_{3 \rightarrow 4} = -4 \text{ kJ}$
- C** $Q_{3 \rightarrow 4} = 2,0 \text{ kJ}$
- D** $Q_{3 \rightarrow 4} = -8,0 \text{ kJ}$

• Question 4

Que vaut la chaleur $Q_{2 \rightarrow 3}$ reçue par le gaz lors de la transformation (2) $\rightarrow$ (3) ?

- A** $Q_{2 \rightarrow 3} = 14,5 \text{ kJ}$
- B** $Q_{2 \rightarrow 3} = 8,1 \text{ kJ}$
- C** $Q_{2 \rightarrow 3} = 5,8 \text{ kJ}$
- D** $Q_{2 \rightarrow 3} = 10,4 \text{ kJ}$

• Question 5

Déterminer le travail W reçu par le fluide au cours du cycle.

- A** $W = -R(T_3 - T_1) \ln(1 + \beta)$
- B** $W = R(T_3 - T_1) \ln \beta$
- C** $W = RT_3 \ln \beta$
- D** $W = RT_1 \ln \beta$

• Question 6

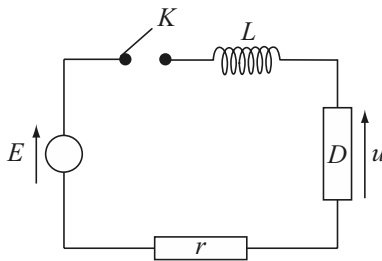
Calculer l'efficacité $\eta = -W / Q_{3 \rightarrow 4}$ de la machine.

- A** $\eta = 0,92$
- B** $\eta = 0,17$
- C** $\eta = 0,42$
- D** $\eta = 0,58$

→ QCM 6 Circuit rLD en régime stationnaire

• Question 1

Le circuit représenté sur la figure ci-dessous comporte une source de tension stationnaire $E = 2 \text{ V}$, une bobine d'inductance $L = 0,5 \text{ H}$, un dipôle D , un résistor de résistance $r = 20 \text{ } \Omega$ et un interrupteur K que l'on ferme à l'instant initial $t = 0$.



Indiquer la ou les affirmation(s) exacte(s).

- A** La tension électrique aux bornes d'une bobine idéale ne subit jamais de discontinuité au cours du temps.
- B** Une bobine est un dipôle non linéaire.
- C** Un condensateur est un dipôle linéaire.
- D** La tension électrique aux bornes d'un condensateur idéal ne subit jamais de discontinuité au cours du temps.

• Question 2

D est un résistor de résistance $R = 150 \text{ } \Omega$. Calculer la durée τ_1 au bout de laquelle la tension aux bornes de D vaut 63,2 % de sa valeur finale.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| A $\tau_1 = 3,3 \text{ ms}$ | B $\tau_1 = 2,9 \text{ ms}$ |
| C $\tau_1 = 25 \text{ ms}$ | D $\tau_1 = 1 \text{ ms}$ |

• Question 3

D est une bobine d'inductance $L' = 350$ mH. Calculer la durée τ_2 au bout de laquelle l'intensité du courant atteint 63,2 % de sa valeur finale.

A $\tau_2 = 15,5$ ms

B $\tau_2 = 25$ ms

C $\tau_2 = 33$ ms

D $\tau_2 = 42,5$ ms

• Question 4

D est désormais un condensateur de capacité $C = 200$ nF. Que vaut le facteur de qualité du circuit ?

A $Q = 79$

B $Q = 35$

C $Q = 1$

D $Q = 0,5$

• Question 5

D étant toujours un condensateur de capacité $C = 200$ nF, après fermeture de K :

A l'intensité du courant électrique évolue en régime pseudo-périodique.

B l'intensité du courant électrique évolue en régime critique.

C l'intensité du courant électrique évolue en régime apériodique (ou surcritique).

D l'intensité du courant électrique tend vers zéro pour $t \rightarrow \infty$.

• Question 6

Quelle est la tension finale u_∞ aux bornes du condensateur pour $t \rightarrow \infty$?

A $u_\infty = 0$ V

B $u_\infty = 1$ V

C $u_\infty = 2$ V

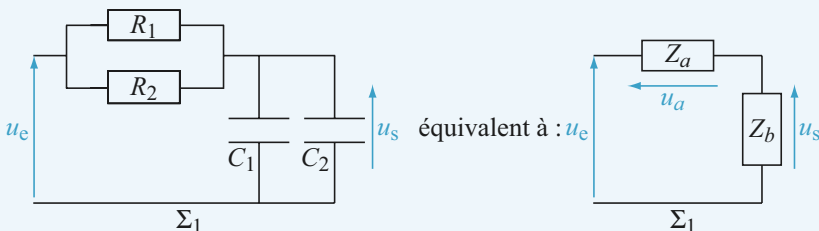
D u_∞ n'est pas définie.

→ QCM 1 Filtre passif

• Question 1 : réponse A

Notons $\underline{Z}_a$ l'impédance complexe du dipôle équivalent à l'association en parallèle des deux résistors, et $\underline{Z}_b$ l'impédance complexe du dipôle équivalent à l'association en parallèle des deux condensateurs.

Le montage se simplifie, comme l'indique le schéma ci-dessous.



Calculons $\underline{Z}_a$ et $\underline{Z}_b$.

En parallèle, les admittances complexes s'ajoutent :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{\underline{Z}_a} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ \bullet \quad \frac{1}{\underline{Z}_b} &= jC_1\omega + jC_2\omega = j(C_1 + C_2)\omega \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_b = \frac{1}{j(C_1 + C_2)\omega} \end{aligned}$$

La fonction de transfert $T(j\omega)$ s'obtient par simple application d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\underline{Z}_b}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_b} = \frac{\frac{1}{j(C_1 + C_2)\omega}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{j(C_1 + C_2)\omega}} = \frac{1}{1 + j \frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} \omega}$$

$$\underline{T}(0) = 1 \quad \text{et} \quad \underline{T}(\infty) = 0.$$

Le filtre Σ_1 laisse passer les basses fréquences (comportement suiveur) mais stoppe les hautes fréquences : il s'agit donc d'un filtre **passé-bas**.

$\underline{T}(j\omega)$ s'écrit comme un rapport de deux polynômes en $j\omega$: le numérateur, une constante, est de degré égal à zéro, tandis que le dénominateur est de degré égal à 1. L'ordre du filtre est le plus élevé des degrés des deux polynômes : le filtre est donc du **premier ordre**.

Finalement :

Σ_1 se comporte comme un **passé-bas du premier ordre**. → Réponse A

• Question 2 : réponse D

Le gain du filtre est le module de la fonction de transfert établie à la question précédente :

$$G(\omega) = |\underline{T}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} \omega \right)^2}}$$

Le filtre étant un passe-bas, $G(\omega)$ est maximal lorsque $\omega = 0$:

$$G_{\max} = G(0) = 1$$

La pulsation ω_c de coupure à -3 dB est définie par :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

soit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} \omega_c \right)^2}}$$

$$\text{de solution } \omega_c = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$$

→ Réponse D



L'analyse dimensionnelle n'est d'aucun recours dans cette question, les quatre expressions proposées étant homogènes au rapport $1/RC$, donc à une pulsation.

• Question 3 : réponse B

La fréquence f_c de coupure à -3 dB est définie par :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$$

soit numériquement :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^3}{2 \times 3,14 \times 1 \cdot 10^3 \times 2 \cdot 10^3 \times 250 \cdot 10^{-9}} = 955 \text{ Hz}$$

→ Réponse B

• Question 4 : réponse D

ϕ représente l'avance de phase de la tension $u_s(t)$ par rapport à la tension $u_e(t)$, autrement dit le déphasage du filtre, égal à l'argument de la fonction de transfert établie à la question 1 :

$$\phi = \arg[\underline{T}(j\omega)] = -\arctan\left(\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} \omega\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Lorsque $\omega = 2\omega_c$:

$$\phi = -\arctan(2) = -63,4^\circ$$

→ Réponse D

• Question 5 : réponse B

Notons $u_a(t)$ la tension aux bornes du dipôle équivalent d'impédance Z_a (cf. figure de la question 1).

La puissance moyenne $\mathcal{P}$ dissipée dans le résistor de résistance R_1 s'écrit :

$$\mathcal{P} = \frac{u_{a,m}^2}{2R_1} \quad (1)$$

La détermination de $u_{a,m}$ étant beaucoup plus rapide que celle de l'amplitude $i_{1,m}$ de l'intensité du courant circulant dans le résistor de résistance R_1 , il est déconseillé d'utiliser la relation :

$$\mathcal{P} = \frac{R_1 i_{1,m}^2}{2}$$

Déterminons $u_{a,m}$ à l'aide d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_{a,m}} = \underline{u_{e,m}} \frac{\underline{Z_a}}{\underline{Z_a} + \underline{Z_b}} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \underline{u_{e,m}}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{j(C_1 + C_2)\omega}} = \frac{\underline{u_{e,m}}}{1 - j \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)\omega}} = \frac{\underline{u_{e,m}}}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}}$$

Lorsque $\omega = \omega_c$:

$$\underline{u_{a,m}} = \frac{\underline{u_{e,m}}}{1 - j} \quad \text{d'où l'amplitude réelle :} \quad u_{a,m} = |\underline{u_{a,m}}| = \left| \frac{\underline{u_{e,m}}}{1 - j} \right| = \frac{u_{e,m}}{\sqrt{2}}$$

En reportant dans (1), on obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{u_{e,m}^2}{4R_1}$$

→ Réponse B



• Question 6 : réponse C

Lorsque $\omega = \omega_c$, la période T du signal vaut :

$$T = T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{955} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 1,05 \text{ ms}$$

Supposons que $\tau \gg T_c$: il est alors possible de tenir un raisonnement à puissance **constante**, égale à la puissance moyenne, ce qui revient à négliger la partie non entière de τ/T_c devant sa partie entière.

D'après la question précédente, l'énergie totale $\mathcal{E}$ dissipée par effet Joule dans le résistor de résistance R_1 pendant la durée τ s'écrit :

$$\mathcal{E} = P\tau = \frac{u_{e,m}^2}{4R_1} \tau \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{4R_1 \mathcal{E}}{u_{e,m}^2}$$

et numériquement :

$$\tau = \frac{4 \times 10^3 \times 1}{2^2} = 1\,000 \text{ s} = \mathbf{16 \text{ min } 40 \text{ s}}$$

→ Réponse C

$\tau \gg T_c$: l'hypothèse est validée.

→ QCM 2 Ressort

• Question 1 : réponse C

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé galiléen, la masselotte A est soumise à deux forces :

- son poids : $\vec{P} = M \vec{g} = Mg \cdot \vec{e}_z$
- la force de rappel du ressort : $\vec{T} = -k(z - L_0) \cdot \vec{e}_z$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masselotte dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$M \vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$$

soit, en projection sur l'axe Oz :

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = Mg - k(z - L_0)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{M} z = g + \frac{kL_0}{M} \quad (1)$$

Cette équation différentielle linéaire du 2nd ordre, avec 2nd membre et sans dérivée première, admet des solutions purement harmoniques de pulsation :

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{M} \right)^{1/2}$$

et de période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left(\frac{M}{k} \right)^{1/2}$$

→ Réponse **C**

• Question 2 : réponse **B**

À l'équilibre de la masselotte, l'écriture (1) du PFD se réduit à :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{M} z_{\text{éq}} = g + \frac{kL_0}{M}$$

$$z_{\text{éq}} = L_0 + \frac{Mg}{k}$$

L'allongement du ressort vaut alors :

$$\Delta L = z_{\text{éq}} - L_0 = \frac{Mg}{k}$$

et numériquement :

$$\Delta L = \frac{0,2 \times 9,80}{10} = 0,196 \text{ m} = 19,6 \text{ cm}$$

→ Réponse **B**

• Question 3 : réponse **A**

À l'instant t , la masse m du ressort étant répartie uniformément sur sa longueur z_A , la masse dm d'une tranche infinitésimale τ du ressort est proportionnelle à l'épaisseur dz de cette tranche :

$$dm = \frac{m}{z_A} dz$$

L'énergie cinétique de la tranche τ s'écrit alors :

$$d\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} dm \cdot v^2(z)$$

$$d\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{z_A} dz \right) \cdot \left(\frac{zv_A}{z_A} \right)^2$$

soit finalement :

$$d\mathcal{E}_k = \frac{mz_A^2 v_A^2}{2z_A^3} dz$$

→ Réponse **A**

• Question 4 : réponse B

L'énergie cinétique totale $\mathcal{E}_k^T$ du ressort est le résultat de la sommation intégrale de l'énergie cinétique élémentaire obtenue à la question précédente :

$$\mathcal{E}_k^T = \int_{\text{ressort}} d\mathcal{E}_k^T = \int_{\text{ressort}} \frac{mz^2 v_A^2}{2z_A^3} dz$$

Attention : z_A et v_A dépendent de la variable t , mais pas de la variable z . L'intégrale précédente se fait à t constant, donc z_A et v_A sont constants (paramètres).

$$\mathcal{E}_k^T = \frac{mv_A^2}{2z_A^3} \int_0^{z_A} z^2 dz$$

$$\mathcal{E}_k^T = \frac{mv_A^2}{2z_A^3} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{z_A}$$

Finalement :

$$\mathcal{E}_k^T = \frac{mv_A^2}{6}$$

→ Réponse B



Si la totalité de la masse m était ramassée au point A, l'énergie cinétique totale du ressort s'écrirait :

$$\mathcal{E}_k^T = \frac{mv_A^2}{2}$$

Chaque tranche infinitésimale T du ressort ayant une vitesse $v(z)$ strictement inférieure à v_A , il s'ensuit que $\mathcal{E}_k^T$ est forcément strictement inférieure à la valeur précédente :

$$\mathcal{E}_k^T < \frac{mv_A^2}{2}$$

Le résultat de la réponse C ne peut donc pas convenir.

• Question 5 : réponse D

La conservation de l'énergie mécanique du système {ressort + masselotte} s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k^T + \mathcal{E}_k^A + \mathcal{E}_p = C^{ste}$$

soit, compte tenu de la question précédente :

$$\mathcal{E}_m = \frac{mv_A^2}{6} + \frac{Mv_A^2}{2} + \frac{1}{2}k(z_A - L_0)^2 = C^{ste}$$

$$\frac{1}{2}(M+m/3)\left(\frac{dz_A}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k(z_A - L_0)^2 = C^{ste}$$

$$\left(\frac{dz_A}{dt}\right)^2 + \frac{k}{M+m/3}(z_A - L_0)^2 = C^{ste} = C$$

Par identification avec l'équation différentielle proposée dans l'énoncé, on obtient l'expression de ω :

$$\omega = \left(\frac{k}{M+m/3}\right)^{1/2}$$

→ Réponse **D**

→ QCM 3 Sphère creuse chargée

• Question 1 : réponse **B**

En coordonnées sphériques, $\vec{E}(M)$ s'écrit :
$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_r(r, \theta, \varphi) \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

M appartient à une infinité de plans de symétrie de la distribution de charges, les plans radiaux d'axe OM . Donc, d'après les propriétés de symétrie du champ électrique (cf. chapitre 6, QCM 1, question 2) :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{e}_r$$

Toute rotation d'angle θ ou φ laisse la distribution de charges invariante, donc :

$$\vec{E}(M) = E(r) \cdot \vec{e}_r \quad \text{et} \quad V(M) = V(r)$$

Les symétries sont « fortes », champ et potentiel sont demandés en tout point, on opte pour une résolution par le **théorème de Gauss** :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q_{\text{intérieure à } \Sigma}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

La surface de Gauss Σ sera une sphère de centre O et rayon r orientée vers l'extérieur.

• Calculons le flux sortant de $\vec{E}$ à travers Σ :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \left(E(r) \cdot \vec{e}_r \right) \cdot \left(d\Sigma \cdot \vec{e}_r \right) = \oiint_{\Sigma} E(r) r^2 \cdot \sin \theta d\theta d\varphi$$

Cette double intégration se fait à r fixe :

$$\Phi = r^2 E(r) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = r^2 E(r) [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi r^2 E(r) \quad (2)$$

- Dans cette question, où le point M est situé dans la région (I) ($r > R$), la charge intérieure à Σ vaut :

$$Q_I = \iiint_{\alpha R < r < R} \rho d\tau$$

L'élément de volume $d\tau$ s'écrit en coordonnées sphériques :

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

donc :

$$Q_I = \iiint_{\alpha R < r < R} \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \rho \int_{\alpha R}^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q_I = \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\alpha R}^R \cdot [-\cos \theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$Q_I = (1 - \alpha^3) \frac{4\pi \rho R^3}{3} \quad (3)$$

- D'après (1), (2) et (3) :

$$4\pi r^2 E_I(r) = (1 - \alpha^3) \frac{4\pi \rho R^3}{3\epsilon_0}$$

soit finalement :

$$\vec{E}_I(r) = (1 - \alpha^3) \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$$

→ Réponse **B**

• Question 2 : réponse **D**

Le point M est maintenant situé dans la région (II) définie par $\alpha R < r < R$.

- Le calcul de flux Φ reste inchangé.
- La charge intérieure à Σ vaut cette fois-ci :

$$Q_{II} = \rho \int_{\alpha R}^r r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

L'emploi de la même notation r pour désigner à la fois la variable et la borne supérieure de la 1^{ère} intégrale dans l'expression précédente est un abus d'écriture toléré. Là où le mathématicien aurait utilisé des notations différentes, le physicien préfère conserver la même lettre r qui représente un rayon.

$$Q_{II} = \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\alpha R}^r \cdot [-\cos \theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$Q_{II} = \frac{4\pi \rho r^3}{3} - \frac{4\pi \alpha^3 \rho R^3}{3} \quad (4)$$



- D'après (1), (2) et (4) :

$$4\pi r^2 E_{II}(r) = \frac{4\pi \rho r^3}{3\epsilon_0} - \frac{4\pi \alpha^3 \rho R^3}{3\epsilon_0}$$

soit finalement :

$$\vec{E}_{II}(r) = \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{\alpha^3 \rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \right) \cdot \vec{e}_r$$

→ Réponse **D**

• Question 3 : réponse **D**

V ne dépendant que de r , et le champ électrique étant radial :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \quad \text{se simplifie en} \quad E(r) = -\frac{dV}{dr}, \quad \text{soit}$$

$$V(r) = -\int E(r) dr$$

Lorsque le point M est situé dans la région (I) ($r > R$) :

$$V_I(r) = -\int E_I(r) dr$$

et, d'après la question 1 :

$$V_I(r) = -\int (1 - \alpha^3) \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} dr = -(1 - \alpha^3) \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr = (1 - \alpha^3) \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0} + K_1$$

Le potentiel est choisi **nul à l'infini**. On en déduit la valeur de la constante d'intégration K_1 :

$$V_I(\infty) = 0 + K_1 = 0 \quad \text{d'où} \quad K_1 = 0.$$

Finalement :

$$V_I(r) = (1 - \alpha^3) \frac{\rho R^3}{3r\epsilon_0}$$

→ Réponse **D**

• Question 4 : réponse **A**

La détermination du potentiel $V_{III}(r)$ ne peut se faire qu'en utilisant la continuité du potentiel aux frontières des trois régions de l'espace. Elle nécessite donc la détermination préalable du potentiel $V_{II}(r)$.

- Lorsque le point M est situé dans la région (II) ($\alpha R < r < R$) :

$$V_{II}(r) = -\int E_{II}(r) dr$$

et, d'après la question 2 :

$$V_{II}(r) = -\int \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{\alpha^3 \rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \right) dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int \left(r - \frac{\alpha^3 R^3}{r^2} \right) dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{\alpha^3 R^3}{r} \right) + K_2$$



En l'absence de charge ponctuelle ou linéique, le potentiel est continu à la frontière des régions (I) et (II) :

$$V_{\text{II}}(R^-) = V_{\text{I}}(R^+)$$

On en déduit la valeur de la constante d'intégration K_2 :

$$-\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} + \alpha^3 \right) + K_2 = (1 - \alpha^3) \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

$$K_2 = \left(1 - \alpha^3 + \frac{1}{2} + \alpha^3 \right) \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Finalement :

$$V_{\text{II}}(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(-\frac{r^2}{6} - \frac{\alpha^3 R^3}{3r} + \frac{R^2}{2} \right)$$

- Lorsque le point M est situé dans la région (III) ($r < \alpha R$), la charge intérieure à Σ est nulle. Donc, d'après le théorème de Gauss :

$$\vec{E}_{\text{III}} = \vec{0}$$

et :

$$V_{\text{III}}(r) = -\int E_{\text{III}}(r) dr = K_3$$

Le potentiel est continu à la frontière des régions (II) et (III) :

$$V_{\text{III}}(\alpha R^-) = V_{\text{II}}(\alpha R^+)$$

d'où la valeur du potentiel $V_{\text{III}}(r)$, constant :

$$V_{\text{III}}(r) = K_3 = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0} \left(-\frac{\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$V_{\text{III}}(r) = (1 - \alpha^2) \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

→ Réponse **A**



L'expression de la réponse C, qui s'exprime en $[V].[m]^{-1}$, est fautive puisqu'elle n'est pas homogène à un potentiel.

• Question 5 : réponse **C**

La charge totale de (S) doit être la même avec les deux types de modélisation :

$$Q_{\text{surface}} = Q_{\text{volume}}$$

$$\underbrace{\sigma (4\pi R^2)}_{\text{surface de (S)}} = \rho \underbrace{[4\pi R^2 (R - \alpha R)]}_{\text{volume de (S)}}$$

soit finalement :

$$\sigma = (1 - \alpha) R \rho$$

→ Réponse **C**



La réponse D est impossible : elle propose une charge surfacique σ exprimée en [C] et non pas en [C].[m]⁻².

• Question 6 : réponse **D**

En modélisation **surfactive**, le potentiel est **continu** à la traversée de la surface chargée (S) :

$$V_I(R) = V_{III}(\alpha R)$$

Dans la région (III), le potentiel est uniforme d'après la question 4, donc :

$$V_{III}(\alpha R) = V_{III}(0)$$

Finalement :

$$U = V_I(R) - V_{III}(0) = 0$$

→ Réponse **D**



Les réponses A, B et C ne pouvaient pas convenir, en raison de leur dimension : l'expression B s'exprime en [V].[m]⁻¹, et les expressions A et C en [V].[m]⁻².

→ QCM 4 Lunette astronomique

• Question 1 : réponse **B**

Système afocal

Un système optique est dit **afocal** s'il donne d'un objet situé à l'infini une image également située à l'infini, autrement dit s'il transforme un faisceau incident de rayons parallèles entre eux, en un faisceau émergent de rayons également parallèles entre eux. Un tel système n'a pas de foyers, ce qui revient à dire que ses foyers F et F' sont rejetés à l'infini.

Il est intéressant de distinguer, au sein des systèmes optiques constitués d'une ou plusieurs lentille(s) mince(s) :

1. Ceux qui sont munis en sortie d'un oculaire, destiné à placer l'œil : ces instruments forment une image finale à l'infini, ce qui permet à l'œil d'observer sans accommoder, donc sans fatiguer (lunette de Galilée, lunette astronomique, microscope, viseur). Parmi eux, seuls ceux qui sont destinés à l'observation d'objets à l'infini sont des systèmes afocaux (lunette de Galilée, lunette astronomique).
2. Les autres (projecteur diapo, rétroprojecteur, appareil photographique...).



Dans le cas de la lunette astronomique, constituée de deux lentilles minces convergentes, notons :

- F_1 et F'_1 les foyers de l'objectif (L_1) ;
- F_2 et F'_2 ceux de l'oculaire (L_2) ;
- AB un objet primitif ;
- $A'B'$ l'image de AB à travers la lentille (L_1). $A'B'$ joue également le rôle d'objet pour la lentille (L_2) ;
- $A''B''$ l'image de $A'B'$ à travers (L_2). $A''B''$ est l'image finale donnée par la lunette.

L'oculaire étant placé de telle sorte que l'instrument soit afocal :

- AB est situé à l'infini, donc A' est confondu avec F'_1 ;
- $A''B''$ est situé à l'infini, donc A' est confondu avec F_2 .

Par conséquent : $F'_1 = F_2$ et :

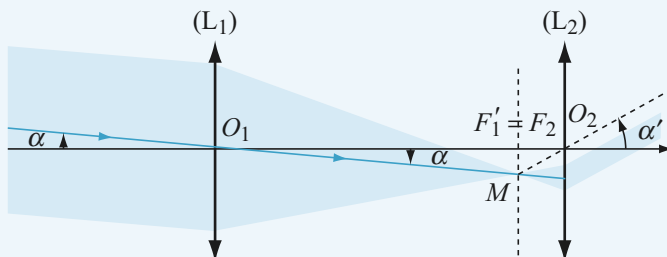
$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = \overline{O_1F'_1} - \overline{O_2F_2} = f'_1 + f'_2$$

$$\overline{O_1O_2} = 115 + 20 = 135 \text{ mm}$$

Grandissement angulaire d'un instrument optique

Le grandissement angulaire G_a d'un instrument optique, encore appelé **grossissement**, est le rapport $G_a = \alpha'/\alpha$ de l'angle α' sous lequel un observateur voit un objet à travers l'instrument (il voit en réalité l'image finale de cet objet) sur l'angle α sous lequel il voit le même objet à l'œil nu.

La figure ci-après représente le devenir du faisceau cylindrique (formé de rayons parallèles entre eux) issu du bord **supérieur** d'un objet stellaire circulaire situé à l'infini, lorsque son bord **inférieur** envoie un faisceau cylindrique parallèle à l'axe optique. À l'entrée de la lunette, un tel faisceau est donc incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique. À la sortie, il lui correspond un faisceau cylindrique incliné d'un angle α' par rapport à l'axe optique. Pour les règles de construction des rayons, on pourra se reporter aux procédures détaillées au chapitre 2, QCM 5, question 4.



Considérons les triangles $(O_1F'_1M)$ et $(O_2F'_1M)$: tous deux sont rectangles en F'_1 et possèdent en commun le côté F'_1M , qui représente le côté opposé par rapport aux angles α et α' .

On peut alors écrire :

$$\overline{F'_1M} = \overline{O_1F'_1} \cdot \tan \alpha = \overline{O_2F'_1} \cdot \tan \alpha' \quad \text{soit} \quad \tan \alpha' = \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_2F'_1}} \cdot \tan \alpha = -\frac{f'_1}{f'_2} \cdot \tan \alpha$$

La lunette travaillant dans les **conditions de Gauss**, les angles α et α' sont petits, et leurs tangentes peuvent être approximées aux valeurs de ces angles exprimées en radian :

$$\tan \alpha \approx \alpha \quad \text{et} \quad \tan \alpha' \approx \alpha'$$

$$\text{d'où} \quad \alpha' = -\frac{f'_1}{f'_2} \cdot \alpha \quad \text{et} \quad G_a = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

→ Réponse **B**

Le grandissement angulaire est négatif, ce qui signifie que l'image de la face visible de la Lune nous apparaît inversée. Par ailleurs, il est supérieur à 1 en valeur absolue, ce qui nécessite de choisir $f'_1 > f'_2$.



Les réponses A et D, qui proposent un grandissement angulaire inférieur à 1 en valeur absolue, sont fausses.

• Question 2 : réponse **D**

Le grandissement angulaire de la lunette, établi à la question précédente, s'écrit :

$$G_a = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

L'écart angulaire θ_m minimal entre deux étoiles est la valeur absolue de l'angle α qui correspond à un angle α' égal à la limite de résolution angulaire de l'œil :

$$\theta_m = |\alpha| = \frac{f'_2}{f'_1} \alpha' = \frac{20}{115} \times 1,5 = 0,26'$$

→ Réponse **D**



La lunette astronomique permet de grossir, c'est-à-dire de séparer angulairement deux objets très rapprochés que l'œil nu ne pourrait pas distinguer. Par conséquent, la réponse B, qui propose une valeur $\theta_m = 3,8'$ supérieure à la limite de résolution angulaire de l'œil, est impossible.

• Question 3 : réponse C

Pour déterminer la position de l'image de O_1 par la lentille (L_2), il suffit d'appliquer la relation de conjugaison de la lentille (L_2) :

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{\overline{O_2 O_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

soit :

$$p'_1 = \frac{f'_2 \cdot \overline{O_2 O_1}}{f'_2 + \overline{O_2 O_1}}$$

D'après la question 1 : $\overline{O_2 O_1} = -135$ mm
donc :

$$p'_1 = \frac{20 \times (-135)}{20 - 135} = 23,5 \text{ mm} \quad \rightarrow \text{Réponse C}$$

• Question 4 : réponse D

La relation de grandissement transversal de la lentille (L_2) s'écrit :

$$G_{t,2} = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2 A_2}}{\overline{O_2 A}}$$

Appliquons cette relation à l'objet (L_1) de diamètre $D_1 = 4$ cm. Sachant que les diamètres des montures objet et image représentent des tailles **absolues** :

$$\frac{D'_1}{D_1} = \left| \frac{p'_1}{\overline{O_2 O_1}} \right|$$

d'où :

$$D'_1 = \left| \frac{p'_1}{\overline{O_2 O_1}} \right| D_1 = \frac{23,5}{135} \times 40 = 7,0 \text{ mm} \quad \rightarrow \text{Réponse D}$$

Il n'est pas indispensable ici de faire l'application numérique dans le système international d'unités : on peut utiliser un sous-multiple du mètre. En revanche, il est fortement conseillé d'uniformiser les unités (mm ou cm). Il est bien sûr toujours possible de prendre davantage de liberté, à condition de toujours garder le contrôle de ce que l'on fait !...

• Question 5 : réponse D

Dans cette question, la lunette n'est plus afocale. Elle continue néanmoins à former une image finale $A''B''$ à l'infini, donc A' reste confondu avec F_2 .



Pour déterminer la position de l'image A' par (L_1) d'un objet A situé à 50 m de (L_1) , appliquons la relation de conjugaison à la lentille (L_1) :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

soit :

$$\overline{O_1A'} = \frac{f'_1 \cdot \overline{O_1A}}{f'_1 + \overline{O_1A}} = \frac{0,115 \times (-50)}{0,115 - 50} = 0,11527 \text{ m}$$

et puisque A' et F_2 sont confondus :

$$\overline{O_1F_2} = 0,11527 \text{ m}$$

Dès lors, le déplacement d de l'oculaire vaut :

$$d = \overline{F'_1F_2} = \overline{O_1F_2} - \overline{O_1F'_1} = 0,11527 - 0,115 = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ m} = \mathbf{0,27 \text{ mm}}$$

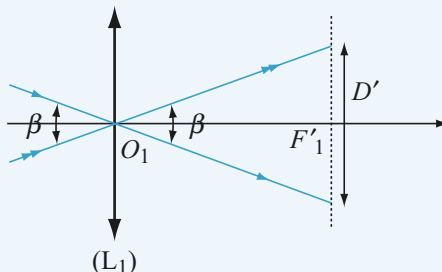
→ **Réponse D**

De manière générale, il est déconseillé d'effectuer les applications numériques des expressions littérales intermédiaires lorsque cela n'est pas exigé. On s'y est pourtant risqué dans cette question, pour échapper à la monstruosité de certaines expressions, mais attention : pour produire un résultat final assorti de deux chiffres significatifs, le résultat intermédiaire $\overline{O_1F_2}$ devait en comporter cinq !



• Question 6 : réponse A

Les rayons parvenant au centre optique O_1 de la lentille (L_1) , en provenance de la circonférence de la galaxie d'Andromède, forment un cône de révolution d'angle au sommet $\beta = 2,5^\circ$. Ces rayons n'étant pas déviés, le diamètre D' de l'image s'obtient simplement :



$$D' = 2f'_1 \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2 \times 115 \times \tan(1,25^\circ) = \mathbf{5,0 \text{ mm}} \quad \rightarrow \text{Réponse A}$$

→ QCM 5 Machine de Stirling

• Question 1 : réponses **A et D**

Machines dithermes

Le travail W des forces de pression extérieures reçu par le fluide caloporteur d'une machine ditherme au cours d'un cycle, **réversible ou non**, est :

- **négatif** si le cycle est parcouru en sens **horaire** dans le diagramme de Clapeyron $p = f(V)$: la machine est alors un **moteur** ;
- **positif** si le cycle est parcouru en sens **trigonométrique** dans le diagramme de Clapeyron $p = f(V)$: la machine est alors un **récepteur**.

Le cycle proposé est parcouru en sens **horaire**. La machine de Stirling est donc un **moteur** : la réponse A est bonne.

Un cycle de Carnot est un cycle moteur ditherme constitué de deux transformations **isothermes réversibles** et de deux transformations **adiabatiques réversibles** : la réponse B est fausse.

Réfrigérateur et pompe à chaleur sont à classer parmi les **récepteurs** dithermes : le travail W des forces de pression extérieures reçu par le fluide caloporteur au cours d'un cycle est positif, fourni par l'alimentation électrique : la réponse C est fausse.

Variable d'état

On appelle **variable d'état d'un système** toute grandeur thermodynamique X caractérisant l'état du système à **une date donnée**. Autrement dit, la variation $\Delta X = X_2 - X_1$ du système entre les dates 1 et 2 ne dépend que des états 1 et 2, et pas du chemin suivi pour parvenir de 1 à 2.

En particulier, pour un cycle : $\Delta X = 0$.

Sont variables d'état :

la pression p , le volume V , la température T , le nombre de moles n , la masse m , l'énergie interne U , l'enthalpie H , l'entropie S .

Il s'ensuit que la variation d'entropie du gaz est nulle au cours d'un cycle : la réponse D est bonne.

→ Réponses **A et D**

• Question 2 : réponse **D**

Lors de la transformation (3) → (4), le **seul** travail est celui des forces de pression extérieures :

$$W_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 -p_e dV$$

La détente étant **réversible**, donc quasi statique, la pression extérieure p_e est égale à chaque instant de la transformation à la pression p du système :

$$W_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 -p dV$$

Le système est constitué d'**une** mole de gaz supposé **parfait** :

$$W_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 -\frac{RT}{V} dV$$

La détente est **isotherme** à T_3 :

$$W_{3 \rightarrow 4} = -RT_3 \int_{V_2}^{V_1} \frac{1}{V} dV = -RT_3 [\ln V]_{V_2}^{V_1} = -RT_3 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = -RT_3 \ln \left(\frac{1}{\beta} \right)$$

Finalement :

$$W_{3 \rightarrow 4} = RT_3 \ln \beta \quad \rightarrow \text{Réponse } \mathbf{D}$$

$\beta < 1$ donc $\ln \beta < 0$ et $W_{3 \rightarrow 4}$ est **négatif**, ce qui est conforme au résultat attendu pour une détente. En revanche, les réponses B et C, qui proposent un travail **positif**, doivent être éliminées.

• Question 3 : réponse **A**

Le premier principe de la Thermodynamique appliqué entre les états 3 et 4 s'écrit :

$$\Delta U_{3 \rightarrow 4} = W_{3 \rightarrow 4} + Q_{3 \rightarrow 4} \quad (1)$$

Le gaz étant parfait, on peut lui appliquer la 1^{ère} loi de Joule :

$$\Delta U_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 c_v dT$$

La transformation (3) → (4) étant isotherme à T_3 :

$$\Delta U_{3 \rightarrow 4} = \int_3^4 c_v \underbrace{dT}_0 = 0$$

Finalement, d'après (1) et le résultat de la question précédente :

$$Q_{3 \rightarrow 4} = -W_{3 \rightarrow 4} = -RT_3 \ln \beta$$

Numériquement :

$$Q_{3 \rightarrow 4} = -8,31 \times 1200 \times \ln 0,2 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ J} = \mathbf{16 \text{ kJ}} \quad \rightarrow \text{Réponse } \mathbf{A}$$

• Question 4 : réponse A

Le premier principe de la Thermodynamique appliqué entre les états 2 et 3 s'écrit :

$$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

Le gaz étant parfait, la variation d'énergie interne vaut :

$$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 c_v dT = \frac{R}{\gamma - 1} \int_{T_1}^{T_3} dT = \frac{R}{\gamma - 1} (T_3 - T_1)$$

La transformation 2 $\rightarrow$ 3 étant **isochore**, le travail $W_{2 \rightarrow 3}$ est nul :

$$W_{2 \rightarrow 3} = \int_2^3 -p_e \underbrace{dV}_0 = 0$$

Finalement :

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = \frac{R}{\gamma - 1} (T_3 - T_1)$$

Numériquement :

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{8,31}{0,4} (1200 - 500) = 1,45 \cdot 10^4 \text{ J} = \mathbf{14,5 \text{ kJ}} \quad \rightarrow \text{Réponse A}$$

• Question 5 : réponse B

Le travail W reçu par le fluide au cours du cycle est :

$$W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1}$$

- La transformation (1) $\rightarrow$ (2) est une compression isotherme réversible à T_1 , donc, par un raisonnement analogue à celui développé à la question 2 :

$$W_{1 \rightarrow 2} = -RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = -RT_1 [\ln V]_{V_1}^{V_2} = -RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -RT_1 \ln \beta$$

- La transformation (2) $\rightarrow$ (3) est isochore :

$$W_{2 \rightarrow 3} = 0$$

- Le travail de la transformation (3) $\rightarrow$ (4) a été calculé à la question 2 :

$$W_{3 \rightarrow 4} = RT_3 \ln \beta$$

- La transformation (4) $\rightarrow$ (1) est isochore :

$$W_{4 \rightarrow 1} = 0$$

Finalement :

$$W = R(T_3 - T_1) \ln \beta \quad \rightarrow \text{Réponse B}$$

• **Question 6 : réponse D**

L'efficacité de la machine de Stirling, qu'il convient de nommer **rendement** maintenant qu'il a été établi qu'il s'agit d'un moteur, vaut :

$$\eta = -\frac{W}{Q_{3 \rightarrow 4}}$$

et d'après les questions 3 et 5 :

$$\eta = \frac{T_3 - T_1}{T_3}$$

Numériquement :

$$\eta = \frac{1200 - 500}{1200} = 0,58$$

→ **Réponse D**

→ **QCM 6 Circuit rLD en régime stationnaire**

• **Question 1 : réponses B et D**

En électrocinétique :

- l'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine idéale d'inductance L parcourue par un courant d'intensité i vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} Li^2 \quad (1)$$

- l'énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur idéal de capacité C soumis à la tension u vaut :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} Cu^2 \quad (2)$$

L'énergie est nécessairement une fonction continue du temps, autrement dit elle ne peut pas subir de variation brusque. Pour s'en convaincre et mémoriser ce résultat, on peut penser à l'équivalence masse-énergie établie par Einstein :

$$\mathcal{E} = mc^2$$

L'énergie possède les mêmes facultés que la masse, en particulier son inertie, c'est-à-dire la résistance qu'elle offre à tout changement.

En conséquence, d'après la relation (1) dans laquelle apparaît l'intensité i , et d'après la relation (2) dans laquelle apparaît la tension u , on a les résultats suivants :

Règles de continuité en électrocinétique

- L'intensité du courant parcourant une bobine (idéale ou non) ne subit jamais de discontinuité au cours du temps.
- La tension aux bornes d'un condensateur (idéal ou non) ne subit jamais de discontinuité au cours du temps.

La réponse A est donc fausse, et la réponse D est bonne.

Dipôle linéaire

Un dipôle est linéaire si la tension u à ses bornes est **proportionnelle** à l'intensité i du courant qui le parcourt :

$$u = ki \quad \text{où } k \text{ est une constante.}$$

En convention « récepteur » :

- pour une bobine idéale : $u = L \frac{di}{dt}$

donc une bobine est un dipôle **non linéaire** : la réponse B est bonne.

- pour un condensateur idéal : $i = C \frac{du}{dt}$

donc un condensateur est un dipôle **non linéaire** : la réponse C est fausse.

→ Réponses **B et D**

• Question 2 : réponse **B**

Notons i l'intensité du courant circulant dans le circuit dans le sens indiqué sur la figure ci-dessous.

- La loi d'Ohm aux bornes du résistor de résistance R s'écrit :

$$i = \frac{u}{R} \quad (1)$$

- La loi des mailles s'écrit :

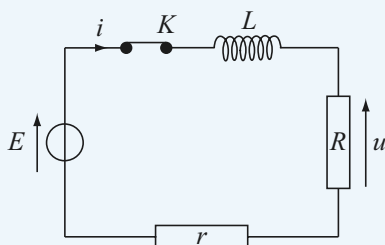
$$L \frac{di}{dt} + u + ri = E \quad (2)$$

En reportant (1) dans (2) on obtient :

$$\frac{L}{R} \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right) u = E$$

soit finalement :

$$\frac{du}{dt} + \frac{R+r}{L} u = \frac{R}{L} E$$



Cette équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre avec 2nd membre constant admet pour solution :

$$u(t) = \underbrace{K_1 \cdot e^{-\frac{R+r}{L}t}}_{\text{solution de l'ESSM}} + \underbrace{\frac{R}{R+r}E}_{\text{solution particulière}} \quad (3)$$

À $t < 0$, avant fermeture de l'interrupteur K : $i(t) = 0$. L'intensité du courant parcourant une bobine ne subit jamais de discontinuité au cours du temps (voir question précédente). Donc, à l'instant $t = 0$:

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$$

et :

$$u(0) = Ri(0) = 0 \quad (4)$$

Cette condition initiale permet de déterminer la constante d'intégration K_1 . D'après (3) et (4) :

$$u(0) = K_1 + \frac{R}{R+r}E = 0 \quad \text{donc} \quad K_1 = -\frac{R}{R+r}E$$

et :

$$u(t) = \frac{R}{R+r}E \left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t} \right) = u_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t} \right)$$

On a alors :

$$u(\tau_1) = 0,632 u_{\infty}$$

soit :

$$e^{-\frac{R+r}{L}\tau_1} = 1 - 0,632 = 0,368 \approx e^{-1}$$

$$\frac{R+r}{L} \tau_1 = 1$$

et finalement :

$$\tau_1 = \frac{L}{R+r} = \frac{0,5}{150+20} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ s} = \mathbf{2,9 \text{ ms}}$$

→ Réponse **B**

• Question 3 : réponse D

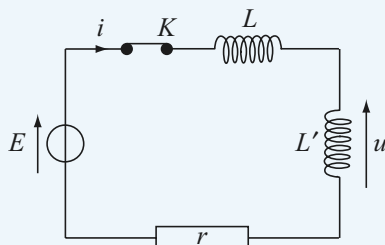
Le montage est maintenant équivalent à celui de la figure ci-contre.

La loi des mailles s'écrit :

$$(L + L') \frac{di}{dt} + ri = E$$

soit finalement :

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{L + L'} i = \frac{E}{L + L'}$$



Cette équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre avec 2nd membre constant admet pour solution :

$$i(t) = \underbrace{K_2 e^{-\frac{r}{L+L'} t}}_{\text{solution de l'ESSM}} + \underbrace{\frac{E}{r}}_{\text{solution particulière}}$$

À $t < 0$, avant fermeture de l'interrupteur K : $i(t) = 0$. L'intensité du courant parcourant une bobine ne subit jamais de discontinuité au cours du temps. Donc, à l'instant $t = 0$:

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$$

Cette condition initiale permet de déterminer la constante d'intégration K_2 :

$$i(0) = K_2 + \frac{E}{r} = 0 \quad \text{donc} \quad K_2 = -\frac{E}{r}$$

et :

$$i(t) = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L+L'} t} \right) = i_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{r}{L+L'} t} \right)$$

On a alors :

$$i(\tau_2) = 0,632 i_{\infty}$$

soit :

$$e^{-\frac{r}{L+L'} \tau_2} = 1 - 0,632 = 0,368 \approx e^{-1}$$

$$\frac{r}{L + L'} \tau_2 = 1$$

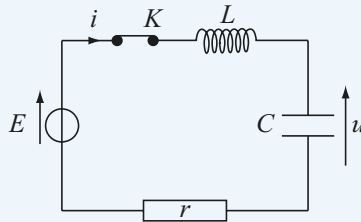
et finalement :

$$\tau_2 = \frac{L + L'}{r} = \frac{0,5 + 0,35}{20} = 4,25 \cdot 10^{-2} \text{ s} = 42,5 \text{ ms}$$

→ Réponse D

• Question 4 : réponse **A**

Le montage est finalement équivalent à celui de la figure ci-dessous :



Caractéristiques d'un circuit **rLC**

- La pulsation propre ω_0 vaut :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{rad.s}^{-1})$$

- Le facteur de qualité Q vaut :

$$Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{rC\omega_0} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{sans dimension})$$

Numériquement : $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{20} \sqrt{\frac{0,5}{200 \cdot 10^{-9}}} = 79 \rightarrow \text{Réponse **A**}$

• Question 5 : réponses **A et D**

À $t > 0$, après fermeture de K :

- aux bornes du condensateur : $i = C \frac{du}{dt} \quad (5)$

- la loi des mailles s'écrit : $L \frac{di}{dt} + u + ri = E \quad (2)$

En reportant (5) dans (2) on obtient : $LC \frac{d^2u}{dt^2} + rC \frac{du}{dt} + u = E$

soit finalement : $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{E}{LC}$

Cette équation différentielle linéaire du 2nd ordre avec 2nd membre constant admet pour solution :

$$u(t) = \underbrace{u_1(t)}_{\text{solution de l'ESSM}} + \underbrace{\frac{E}{LC}}_{\text{solution particulière}} \quad (6)$$

En cherchant des solutions $u_1(t)$ de la forme Ae^{pt} à l'équation sans 2nd membre, on aboutit à l'équation caractéristique :

$$p^2 + \frac{r}{L} p + \frac{1}{LC} = 0$$

Cette équation de second degré, où l'inconnue est p , admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{r}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} = \frac{1}{LC} \left(\frac{r^2 C}{L} - 4\right) = \frac{1}{LC} \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

- $\Delta > 0$ (régime *apériodique*) si $\frac{1}{Q^2} - 4 > 0$, soit $Q < 0,5$.
- $\Delta = 0$ (régime *critique*) si $\frac{1}{Q^2} - 4 = 0$, soit $Q = 0,5$.
- $\Delta < 0$ (régime *pseudo-périodique*) si $\frac{1}{Q^2} - 4 < 0$, soit $Q > 0,5$.

D'après la question précédente : $Q = 79 > 0,5$

donc le régime est **pseudo-périodique**, et la réponse A est bonne.

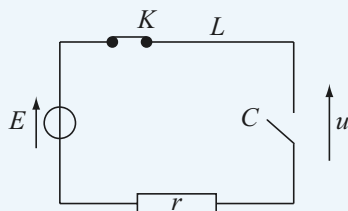
Que l'on cherche au problème des solutions en $u(t)$ ou en $i(t)$, le type de régime transitoire est le même.

Dans l'expression (6), la solution de l'ESSM est la solution du **régime transitoire**. Celui-ci étant toujours de courte durée, la solution de l'ESSM tend toujours vers zéro lorsque t tend vers l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = 0 \quad (7)$$

La solution particulière étant constante, on a alors un **régime établi**, pour lequel la bobine se comporte comme un **fil** et le condensateur comme un **interrupteur ouvert**. Le schéma équivalent du montage pour $t \rightarrow \infty$ est le suivant :

Le circuit étant ouvert, l'intensité du courant électrique tend vers zéro pour $t \rightarrow \infty$, et la réponse D est bonne.



→ Réponses **A et D**

• Question 6 : réponse **C**

D'après (6) et (7) :

$$u_{\infty} = E = 2 \text{ V}$$

→ Réponse **C**